Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

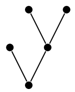
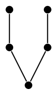
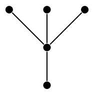
# Numerische Methoden für Differentialgleichungen

## Übungsblatt 4

Wintersemester 2015/16

**Aufgabe 12** (Bäume)

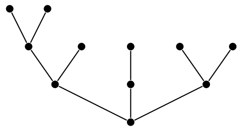
(a) Übersetzen Sie die folgenden Bäume in Differentiale von $f$:

(i)  (ii)  (iii) 

(b) Übersetzen Sie die folgenden Differentiale von $f$ in Bäume:

(i) $f''''(f,f,f,f)$ (ii) $f'f''(f'f,f)$ (iii) $f'f'f''(f,f)$.

(c) Geben Sie konkret für den Baum

$\tau =$ 

an wie die Größen $\Phi(\tau)$ und $\gamma(\tau)$ aus der Ordnungsbedingung aussehen.

**Aufgabe 13** (Konstruktion RKV)

(a) Leiten Sie die Ordnungsbedingungen für ein RKV mit Konsistenzordnung $p = 3$ mithilfe der in der Vorlesung eingeführten Bäume her (siehe Korollar 4.12).

(b) Konstruieren Sie mit (a) ein 3 stufiges explizites RKV der Ordnung 3.

(c) Konstruieren Sie mit (a) ein 2 stufiges implizites RKV der Ordnung 3 mit $c_2 = 1$.

**Aufgabe 14** (Ordnungsbedingungen)

(a) Geben Sie das Butcher-Tableau an für
   (i) das implizite Euler-Verfahren.
   (ii) die Mittelpunktsregel.
   (iii) die Trapezregel.

(b) Bestimmen Sie mithilfe der Ordnungsbedingungen die Ordnung der Verfahren (i)-(iii) aus a).

**Aufgabe 15** (Autonomisierung)

Zeigen Sie, dass ein explizites $s$-stufiges RKV mit den Eigenschaften

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i \quad \text{für} \quad i = 1,\dots,s$$

invariant gegenüber Autonomisierung ist. Das heißt, das Verfahren angewandt auf die Differentialgleichung

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$$

ist äquivalent zu einem RKV angewandt auf das autonome System

$$u'(t) = F\big(u(t)\big)$$

mit

$$u(t) = \begin{bmatrix} t \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad F\big(u(t)\big) = \begin{bmatrix} 1 \\ f\big(t, y(t)\big) \end{bmatrix}.$$

---

Die Aufgaben werden am **Montag, den 16. November 2015, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

**Homepage:**

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.