Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 5

Aufgabe 16 (Stabilitätsgebiet)

Durch das Butcher Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

ist das Verfahren von Heun gegeben.

Bestimmen Sie das Stabilitätsgebiet des Verfahrens von Heun und skizzieren Sie dieses in der komplexen Ebene.

Aufgabe 17 (Stabilität)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

(a) Das implizite Euler-Verfahren ist L-stabil, aber nicht isometrie-erhaltend.

(b) Die implizite Mittelpunktsregel ist isometrie-erhaltend, aber nicht L-stabil.

(c) Es gibt kein Runge-Kutta-Verfahren, das L-stabil und isometrie-erhaltend ist.

Aufgabe 18 (Isometrie-Erhaltung)

Für eine schiefhermitesche Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = My(t)\,, \quad y(0) = y_0 \tag{1}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, für die Lösung y des Anfangswertproblems (1) gilt

$$\|y(t)\| = \|y_0\| \quad \forall t \geq 0\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass ein beliebiges RKV angewandt auf das Anfangswertproblem (1) invariant unter Ähnlichkeitstransformation ist.

Das heißt, für die numerische Approximation y_n zum Anfangswertproblem (1) und die numerische Approximation $\tilde{y}_n$ zum transformierten Anfangswertproblem

$$\tilde{y}'(t) = SMS^{-1}\tilde{y}(t)\,, \quad \tilde{y}(0) = Sy_0\,,$$

mit $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär, gilt der Zusammenhang

$$\tilde{y}_n = Sy_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

(c) Zeigen Sie mithilfe von (b), dass für die numerische Approximation y_n eines isometrie-erhaltenden RKV zum Anfangswertproblem (1) die Gleichung

$$\|y_n\| = \|y_0\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass die Matrix M schiefhermitesch ist.

Aufgabe 19 (Untersuchung eines RKV)

Zur Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big)\,, \quad y(0) = y_0$$

soll das RKV

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\Big(Y_1' + 3Y_2'\Big)$$

mit

$$Y_1' = f\left(t_n, y_n + \frac{h}{4}Y_1' - \frac{h}{4}Y_2'\right) \quad \text{und} \quad Y_2' = f\left(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{h}{4}Y_1' + \frac{5}{12}hY_2'\right)\,.$$

verwendet werden.

(a) Geben Sie das zugehörige Butcher-Schema an.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren mindestens die Ordnung 3 besitzt.

(c) Geben Sie die Stabilitätsfunktion R dieses Verfahrens an.

(d) Zeigen Sie, dass dieses Verfahren L-stabil ist.

Hinweis: R ist holomorph in der linken Halbebene.

Die Aufgaben werden am **Montag, den 23. November 2015, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.