

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 7

Aufgabe 23 (Eingebettete RKV)

Durch das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 1/2 & 1/2 & & \\
 1/2 & 0 & 1/2 & \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
 \end{array}$$

ist das klassische RKV der Ordnung 4 gegeben.

Berechnen Sie die Verfahrenskonstanten $\hat{b}_i, i = 1, \dots, 4$ eines eingebetteten Verfahrens der Ordnung 3 unter Verwendung der durch das Tableau gegebenen Y_i . Begründen Sie, warum sich dieses Verfahren nicht zur Schätzung des Fehlers eignet.

Aufgabe 24 (Fehlberg Trick)

Die Ergebnisse aus Aufgabe 23 zeigen, dass zur Konstruktion eines Fehlerschätzers der Ordnung 3 für das klassische RKV der Ordnung 4 das Hinzufügen einer weiteren Stufe erforderlich ist.

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 1/2 & 1/2 & & & \\
 1/2 & 0 & 1/2 & & \\
 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 c_5 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\
 \hline
 b & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 0 \\
 \hline
 \hat{b} & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \hat{b}_3 & \hat{b}_4 & \hat{b}_5
 \end{array}$$

Um den Gesamtaufwand möglichst nicht zu erhöhen, hatte Erwin Fehlberg die Idee, die letzte Stufe $Y_s^{(n)}$ zur Zeit t_n eines s -stufigen Verfahrens dadurch *effektiv* einzusparen, dass sie identisch mit der ersten Stufe $Y_1^{(n+1)}$ des nächsten Schrittes ist. Das heißt, dass die Gleichheit

$$\underbrace{y_n + h \sum_{j=1}^s a_{sj} f(t_n + c_j h, Y_j^{(n)})}_{Y_s^{(n)}} \stackrel{!}{=} \underbrace{y_{n+1} + h \sum_{j=1}^s a_{1j} f(t_{n+1} + c_j h, Y_j^{(n+1)})}_{Y_1^{(n+1)}}$$

erfüllt ist.

- (a) Geben Sie an, welche Bedingungen die Koeffizienten $c_s, a_{sj}, j = 1, \dots, s - 1$ eines expliziten und konsistenten Verfahrens erfüllen müssen.
- (b) Bestimmen Sie mögliche Koeffizienten $\hat{b}_j, j = 1, \dots, 5$ so, dass das eingebettete Verfahren die maximale Ordnung 3 besitzt.

Aufgabe 25 (Eingebettete RKV)

Gegeben sei das zweistufige RKV

$$\begin{array}{c|cc}
 0 & & \\
 1 & 1 & \\
 \hline
 & 1/2 & 1/2
 \end{array}$$

mit der Konsistenzordnung 2.

Konstruieren Sie ein explizites, eingebettetes, dreistufiges RKV der maximalen

- (i) Ordnung 1,
- (ii) Ordnung 3,

indem Sie das angegebene zweistufige RKV geeignet ergänzen.

Aufgabe 26 (RKV und Quadratur)

Gegeben seien die Koeffizienten b_i und c_i eines RKVs der Ordnung p . Zeigen Sie, dass die Quadraturformel mit den Gewichten b_i und den Stützstellen c_i mindestens die Ordnung p besitzt.

Die Aufgaben werden am **Montag, den 7. Dezember 2015, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.