

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 8

Aufgabe 28 (Ordnung von MSV)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ein MSV mit den Koeffizienten α_i und β_i genau dann die Ordnung p besitzt, wenn die Bedingungen

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i i^q = q \sum_{i=0}^k \beta_i i^{q-1} \quad \text{für} \quad q = 1, \dots, p$$

erfüllt sind. Zeigen Sie, dass diese Bedingungen äquivalent sind zu:

(a) Das MSV liefert die exakte Lösung der Anfangswertprobleme

$$\dot{y}(t) = 0, \quad y(0) = y_0$$

und

$$\dot{y}(t) = qt^{q-1}, \quad y(0) = y_0, \quad \text{für} \quad q = 1, \dots, p.$$

(b) Für die charakteristischen Polynome

$$\alpha(\xi) = \alpha_k \xi^k + \alpha_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + \alpha_0$$

und

$$\beta(\xi) = \beta_k \xi^k + \beta_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + \beta_0$$

des MSV gilt

$$\alpha(e^h) - h\beta(e^h) = O(h^{p+1}) \quad \text{für} \quad h \rightarrow 0.$$

Aufgabe 29 (Konsistenzordnung von MSV)

Das Verfahren von Milne ist gegeben durch die Vorschrift

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3} (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n).$$

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung p dieses Verfahrens.

Aufgabe 30 (Ordnung von MSV)

(a) Begründen Sie mithilfe von Aufgabe 28 (a) die folgenden Aussagen:

(i) Das explizite k -Schritt Adams-Verfahren hat Ordnung k .

(ii) Das implizite k -Schritt Adams-Verfahren hat Ordnung $k + 1$.

(b) Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 28 (b), dass alle 2-Schritt Verfahren der Ordnung zwei durch die charakteristischen Polynome

$$\alpha(\xi) = (\xi - 1)(a(\xi - 1) + 1)$$

und

$$\beta(\xi) = (\xi - 1)^2 b + (\xi - 1) \left(a + \frac{1}{2} \right) + 1$$

mit geeigneten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben sind. Zeigen Sie zusätzlich, dass das Verfahren für $a \neq 2b$ irreduzibel ist.

Hinweis: Verwenden Sie Taylorentwicklungen von α , β und e^h .

Aufgabe 31 (Konstruktion von MSV)

Bestimmen Sie die Koeffizienten

$$\alpha_0, \dots, \alpha_3 \quad \text{und} \quad \beta_0, \dots, \beta_3$$

des impliziten 3-Schritt BDF-Verfahrens.

Die Aufgaben werden am **Montag, den 14. Dezember 2015, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.