

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 9

Aufgabe 32 (Symmetrische MSV)

Ein Mehrschrittverfahren ist symmetrisch, wenn gilt

$$\alpha_j = -\alpha_{k-j} \quad \text{und} \quad \beta_j = \beta_{k-j} \quad \text{für} \quad j = 0, \dots, k.$$

Zeigen Sie, dass für stabile, symmetrische MSV gilt:

(i) $\alpha(\xi) = -\xi^k \alpha(\xi^{-1})$.

(ii) Die Nullstellen von $\alpha(\xi)$ liegen auf dem Einheitskreis.

Aufgabe 33 (Stabilität von MSV)

In Aufgabe 30 auf Übungsblatt 8 wurde gezeigt, dass alle 2-Schritt-Verfahren der Ordnung zwei durch die charakteristischen Polynome

$$\alpha(\xi) = (\xi - 1)(a(\xi - 1) + 1)$$

und

$$\beta(\xi) = (\xi - 1)^2 b + (\xi - 1) \left(a + \frac{1}{2} \right) + 1$$

mit geeigneten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben sind.

(a) Zeigen Sie, für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\operatorname{Re}(z) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^{-1}) > 0.$$

(b) Zeigen Sie, 2-Schritt-Verfahren der Ordnung zwei sind:

(i) genau dann 0-stabil, wenn $a \geq \frac{1}{2}$ gilt.

(ii) genau dann A-stabil, wenn $a \geq \frac{1}{2}$ und $b \geq \frac{a}{2}$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten für ξ , Teilaufgabe (a) und die Gleichung

$$\frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi + 1}{\xi - 1} + \left(b - \frac{a}{2} \right) \frac{\xi - 1}{a(\xi - 1) + 1}.$$

Aufgabe 34 (Stabilität von MSV)

Zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

soll das lineare MSV

$$y_{n+3} + by_{n+1} + ay_n = hf_{n+2}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

verwendet werden.

(a) Bestimmen Sie a und b so, dass das MSV konsistent ist und zeigen Sie, dass die Konsistenzordnung in diesem Fall 1 ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren aus (a) nicht 0-stabil ist.

Aufgabe 35 (MSV maximaler Ordnung)

Bestimmen Sie das (implizite) lineare 2-Schritt-Verfahren maximaler Ordnung. Begründen Sie, ob das Verfahren stabil und/oder symmetrisch ist.

Hinweis: O.B.d.A. gilt $\alpha_2 = 1$. (Warum?)



HAVE A CHRISTMAS

Die Aufgaben werden am **Montag, den 21. Dezember 2015, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.