Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

# Numerische Methoden für Differentialgleichungen

# Übungsblatt 10

Wintersemester 2015/16

**Aufgabe 36** (Root Locus Curve)

Über die Definition des Stabilitätsbereichs eines MSV mithilfe der Nullstellen $\xi_j$ des Polynoms $\alpha(\xi) - z\beta(\xi)$ ist es häufig nicht möglich das Stabilitätsgebiet konkret in der komplexen Ebene anzugeben. Deswegen verwendet man dazu die orientierte Kurve

$$\left\{ \frac{\alpha(\xi)}{\beta(\xi)} \mid \xi = e^{i\theta} \text{ mit } 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

Solche Kurven heißen *Root Locus Curve*. Sie beschreiben den Rand des Stabilitätsbereichs eines MSV.

Zeigen Sie, dass das Stabilitätsgebiet eines durch die Polynome $\alpha$ und $\beta$ definierten MSV links von der *Root Locus Curve* liegt, falls es nicht leer ist.

**Aufgabe 37** (A-Stabilität impliziter Adams-Verfahren)

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass das Stabilitätsgebiet von $k$-Schritt impliziten Adams-Verfahren für $k \geq 2$ beschränkt ist. Damit sind impliziten Adams-Verfahren für $k \geq 2$ insbesondere nicht A-stabil. Um die Beschränktheit des Stabilitätsgebiets zu zeigen, genügt es die Existenz eines $\xi^*$ mit $|\xi^*| > 1$ und $\beta(\xi^*) = 0$ zu zeigen (Warum?). Dies zeigen wir in drei Schritten:

(i) Zeigen Sie, dass $(-1)^k \beta(-1) < 0$ gilt.
**Hinweis:** Verwenden Sie Aufgabe 38.

(ii) Zeigen Sie, dass $\lim_{\xi \to -\infty} (-1)^k \beta(\xi) > 0$ gilt.
**Hinweis:** Verwenden Sie Aufgabe 39.

(iii) Begründen Sie mithilfe von (i) und (ii), dass das Stabilitätsgebiet von $k$-Schritt impliziten Adams-Verfahren für $k \geq 2$ beschränkt ist.

**Aufgabe 38** (Adams-Verfahren)

(a) Zeigen Sie, für die Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $v_k = \xi^k$, $k = 0, 1, \ldots$ gilt der Zusammenhang

$$\nabla^j v_k = \xi^k \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^j.$$

(b) Zeigen Sie mithilfe von (a), dass für die charakteristischen Polynome $\alpha$ und $\beta$ von impliziten Adams-Verfahren gilt

$$\alpha(\xi) = \xi^k \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \quad \text{und} \quad \beta(\xi) = \xi^k \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^j.$$

**Aufgabe 39** (Adams-Verfahren)

**Warnung:** Die folgende Aufgabe ist nicht trivial und steht hauptsächlich aus Gründen der Vollständigkeit auf dem Blatt.

Die Koeffizienten $\gamma_j^*$ eines impliziten Adams-Verfahren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma_0^* &= 1 \\ \gamma_j^* &= \frac{1}{j!} \int_0^1 (\theta - 1) \prod_{k=0}^{j-2} (\theta + k) \mathrm{d}\theta \\ &= (-1)^j \int_0^1 \binom{-\theta + 1}{j} \mathrm{d}\theta \quad \text{für} \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, für $m \geq 1$ gilt die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{m + 1 - j} \gamma_j^* = 0.$$

---

Die Aufgaben werden am **Montag, den 11. Januar 2016, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

**Homepage:**

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.