Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 11

Aufgabe 40 (Finite Differenzen Methode - Randbedingungen)

Wir betrachten die eindimensionale Poissongleichung

$$-u''(x) = f(x)\,, \quad x \in (a,b)$$

mit der Neumann Randbedingung $u'(a) = r_1$ und der Dirichlet Randbedingung $u(b) = r_2$ für vorgegebene Werte r_1 und r_2.

Diese soll mithilfe der Finiten Differenzen Methode gelöst werden.

(a) Geben Sie an, wie das Intervall (a,b) durch $n+1$ Punkte diskretisiert werden kann und stellen Sie das Gleichungssystem für die inneren Punkte der Finiten Differenzen Methode auf.

(b) Geben Sie an, wie sich das Gleichungssystem durch Hinzunahme der Dirichlet Randbedingung verändert.

(c) Um die Neumann Randbedingung in die Finite Differenzen Methode einzuführen, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

(i) Den Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h)\,.$$

(ii) Den Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$u'(x) = \frac{-u(x+2h) + 4u(x+h) - 3u(x)}{2h} + \frac{h^2}{3}u''(x) + O(h^3)\,.$$

(iii) Den zentralen Differenzenquotienten

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{6}u''(x) + O(h^3)\,.$$

Geben Sie an, wie sich die Finite-Differenzen-Matrix in den Fälle (i)-(iii) ändert und erläutern Sie die zentralen Unterschiede der drei Möglichkeiten.

Aufgabe 41 (Finite Differenzen Methode - nicht-äquidistante Gitter)

Für das Intervall $\Omega = (a,b)$ sei das nicht-äquidistante Gitter $\overline{\Omega}_h = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ mit den Schrittweiten $h_i = x_{i+1} - x_i$ für $i = 0,\dots,N-1$ gegeben. Weiter sei $u \in C^4(\Omega)$ mit $u(a) = u(b) = 0$ gegeben und $u_i = u(x_i)$ bezeichne für $i = 0,\dots,N-1$ die Werte von u an den Gitterpunkten.

(a) Leiten Sie den diskreten Laplace Operator Δ_h auf Ω_h her, indem Sie das lokale Interpolationspolynom p_i durch die Punkte (x_k, u_k), $k = i-1,\ i,\ i+1$ aufstellen und $(\Delta_h u)(x_i) = p_i''(x_i)$ setzen.

(b) Geben Sie die zugehörige Matrix $\widetilde{M}$ für den Laplace Operator aus (a) mit homogenen Dirichlet Randbedingungen explizit an und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Matrix M aus der Vorlesung für den äquidistanten Fall.

(c) Zeigen Sie, dass für den Fehler

$$u''(x_i) - (\Delta_h u)(x_i) = \frac{1}{3}u'''(x_i)(h_{i-1} - h_i) + O(h_{i-1}^2 + h_i^2)$$

gilt.

Aufgabe 42 (Finite Differenzen Methode - Eigenwerte und Eigenvektoren)

Zeigen Sie, dass für $k = 1,\dots,m$ die Eigenvektoren $v^{(k)}$ und die Eigenwerte λ_k der Diskretisierungsmatrix

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

gegeben sind durch

$$v^{(k)} = \left(\sin\left(\tfrac{k\pi}{m+1}\right),\ \sin\left(\tfrac{2k\pi}{m+1}\right),\ \dots,\ \sin\left(\tfrac{mk\pi}{m+1}\right)\right)^T$$

und

$$\lambda_k = \frac{2}{h^2}\left(-1 + \cos\left(\tfrac{k\pi}{m+1}\right)\right)\,.$$

Die Aufgaben werden am **Montag, den 18. Januar 2016, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.