Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Übungsblatt 12

Wintersemester 2015/16

Aufgabe 43 (Finite Differenzen)
Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) &= \alpha(t,x)\partial_x^2 u(t,x) + \beta(t,x)u(t,x) + \gamma(t,x)\,, && t \in (0,T]\,, x \in (0,1) \\
u(0,x) &= u_0(x) && x \in [0,1] \\
u(t,0) &= 0 && t \in [0,T] \\
u(t,1) &= g(t) && t \in [0,T]
\end{aligned}
$$

dabei seien die Funktionen $\alpha, \beta, \gamma : [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ und $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ sowie die Anfangsbedingung $u_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ bekannt.

Diese Gleichung soll nun mithilfe der Finiten Differenzen Methode im Raum und dem impliziten Euler Verfahren in der Zeit numerisch approximiert werden.

Führen Sie in allen Details aus, wie diese Approximation funktioniert, indem Sie die Raumdiskretisierung und die Zeitdiskretisierung durchführen und alle auftretenden Vektoren und Matrizen konkret angeben.

Aufgabe 44 (Finite Differenzen)
Die Approximation einer PDE mit homogenen Dirichlet Randbedingungen durch Finite Differenzen im Raum und implizitem Euler in der Zeit führt auf ein lineares Gleichungssystem der Form $(I - \tau A)y^{n+1} = y^n$, welches in jedem Zeitschritt gelöst werden muss.

Dank der speziellen Struktur der Matrix A können Gleichungssysteme dieser Art sehr effizient gelöst werden. Zeigen Sie dazu, dass für die Matrix $M := (I - \tau A)$ eine Zerlegung $M = LDL^T$ existiert mit

$$
D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_{m-1}) \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & l_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{m-2} & 1 \end{pmatrix}.
$$

Aufgabe 45 (Lösung der Wärmeleitungsgleichung)
In der Vorlesung wurde für die Wärmeleitungsgleichung

$$
\left.\begin{cases}
\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) & t \in [0,T],\, x \in (0,\pi)\,, \\
u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \in [0,T]\,, \\
u(0,x) = u_0(x) & x \in [0,\pi],
\end{cases}\right\} \tag{1}
$$

mithilfe von Fourierreihen der Ausdruck

$$
u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) e^{-k^2 t} \quad \text{mit} \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \tag{2}
$$

hergeleitet.

(a) Zeigen Sie, dass u aus (2) die Anfangsbedingung erfüllt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $j, k \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$
\int_0^{\pi} \sin(jx)\sin(kx)dx = \begin{cases} 0, & \text{if } j \neq k \text{ oder } j = k = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{if } j = k \neq 0. \end{cases}
$$

gilt.

Die Beantwortung der Frage, nach der Konvergenz von (2) wurde ausgeklammert. Ein Teil der Antwort soll im folgenden gegeben werden. Wir nehmen dazu an, dass für die Fourierkoeffizienten gilt

$$
\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty\,.
$$

Begründen Sie:

(b) Die Fourierreihe in (2) konvergiert gleichmäßig.

(c) Die formal berechenbaren Ausdrücke $\partial_t u(t,x)$ und $\partial_x^2 u(t,x)$ konvergieren gleichmäßig.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $p \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^p e^{-k^2 t}$ konvergiert.

(d) Durch (2) ist eine Lösung von (1) gegeben.

Die Aufgaben werden am **Montag, den 25. Januar 2016, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.