Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 13

Aufgabe 46 (Stabilität)
Zur Approximation der Lösung der Wärmeleitungsgleichung kann die vertikale Linienmethode verwendet werden. Hierbei wird zunächst die Raumdiskretisierung mithilfe der Finiten Differenzen Methode durchgeführt und anschließend das resultierende System gewöhnlicher Differentialgleichungen mithilfe eines Zeitintegration-Verfahrens approximiert.

Erläutern Sie, warum die Raumdiskretisierung Einfluss auf die Zeitdiskretisierung haben kann und wie sich dieser Einfluss vermeiden lässt.

Aufgabe 47 (Wellengleichung 1)
In der Vorlesung wurde für die Wellengleichung

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t^2 u(t,x) = c^2\partial_x^2 u(t,x) & t>0,\ x\in(0,\pi)\,, \\ u(0,x) = f(x) & x\in[0,\pi], \\ \partial_t u(0,x) = g(x) & x\in[0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t\in[0,T] \end{array}\right\} \tag{1}$$

auf dem Intervall $[0,\pi]$ für gegebenen Funktionen $f\in C^3\big([0,\pi]\big)$ und $g\in C^2\big([0,\pi]\big)$, mit $f(0)=f(\pi)=f''(0)=f''(\pi)=0$ und $g(0)=g(\pi)=0$, die klassische Lösung

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(ckt)+b_k\sin(ckt)\big)\sin(kx) \tag{2}$$

mit

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad b_k=\frac{2}{\pi ck}\int_0^\pi g(x)\sin(kx)\mathrm{d}x$$

angegeben.

Leiten Sie Lösungsformel (2) formal mithilfe des Seperationsansatzes her.

Aufgabe 48 (Wellengleichung 2)
In der Vorlesung wurde für die Wellengleichung

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t^2 u(t,x) = c^2\partial_x^2 u(t,x) & t>0,\ x\in\mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = f(x) & x\in[0,\pi], \\ \partial_t u(0,x) = g(x) & x\in[0,\pi], \end{array}\right\} \tag{3}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ für gegebenen Funktionen f und g die Lösung

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\big(f(x+ct)+f(x-ct)\big)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s \tag{4}$$

angegeben.

(a) Zeigen Sie, dass
$$u(t,x)=F(x+ct)+G(x-ct)$$
für $F,G\in C^2(\mathbb{R})$ eine Lösung der Wellengleichung
$$\partial_t^2 u(t,x)=c^2\partial_x^2 u(t,x)$$
ist.

(b) Zeigen Sie mithilfe von (a), dass (4) eine Lösung der Wellengleichung (3) ist.

Die Aufgaben werden am **Montag, den 1. Februar 2016, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.