1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeit

(1.1) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $G \subset \mathbb{R}^M$ Gebiet.
Zu einem Anfangswert $u_0 \in G$ und $f \in \mathrm{C}([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ suchen wir eine Lösung $u \in \mathrm{C}^1([t_0, t_0 + T], G)$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f\big(t, u(t)\big) \qquad t \in (t_0, t_0 + T) \\ u(t_0) &= u_0 \,. \end{aligned}$$

(1.2) Für $u \in \mathrm{C}([t_0, t_0 + T], G)$ ist äquivalent:

a) $u \in \mathrm{C}^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ und u löst AWA (1.1)

b) u löst die Integralgleichung $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f\big(s, u(s)\big)\, ds$ für $t \in [t_0, t_0 + T]$

(1.3) Sei $f \in \mathrm{C}^k([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$, und sei $u \in \mathrm{C}^1([t_0, t_0 + T], G)$ Lösung der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = f\big(t, u(t)\big)$ für $t \in (t_0, t_0 + T)$.
Dann gilt $u \in \mathrm{C}^{k+1}([t_0, t_0 + T], G)$, und $u^{(j)} = (\frac{d}{dt})^j u$ erfüllt eine lineare Differentialgleichung

$$\dot{u}^{(j)}(t) = b_j(t) + A_j(t) u^{(j)}(t) \qquad \text{für } j = 1, ..., k$$

mit $b_j \in \mathrm{C}^{k-j}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ und $A_j \in \mathrm{C}^{k-j}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^{M \times M})$ abhängig von $u, \dot{u}, ..., u^{(j-1)}$.

Für $j = 1$ gilt $b_1(t) = D_1 f(t, u(t))$ und $A_1(t) = D_2 f(t, u(t))$.

1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeit

(1.4) Zu $R > 0$ mit $B_R(u_0) := \{z \in \mathbb{R}^M : |z - u_0| \leq R\} \subset G$ setze

$$M_R := \max_{(t,z)\in[t_0,t_0+T]\times B_R(u_0)} |f(t,z)| .$$

Dann gilt für jede Lösung u von (1.1)

$$|u(t) - u_0| \leq (t - t_0)M_R\,, \qquad t \in \Big[t_0, t_0 + \min\Big\{T, \frac{R}{M_R}\Big\}\Big] .$$

Im Folgenden sei $T \leq \frac{R}{M_R}$.

(1.5) Zu $N \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 + n\tau$, $\tau = \frac{T}{N}$ ist der *Eulersche Polygonzug* $u_N \in \mathrm{C}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ mit

$$u_N(t) = u_N(t_{n-1}) + (t - t_{n-1}) f\big(t_{n-1}, u_N(t_{n-1})\big), \qquad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad n = 1, \dots, N$$

$v \in \mathrm{C}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ ist Lipschitz-stetig, wenn $L > 0$ existiert mit

$$|v(s) - v(t)| \leq L|s - t|\,, \qquad s,t \in [t_0, t_0 + T] .$$

Die L-stetigen Funktionen bilden einen Banachraum $\mathrm{C}^{0,1}([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^M)$ mit Norm $\|v\|_{0,1,\infty} = \max\Big\{\|v\|_\infty, \sup_{t_0 \leq s < t \leq t_0 + T} \dfrac{|v(s) - v(t)|}{|s - t|}\Big\}$.

(1.6) Der Eulersche Polygonzug ist wohldefiniert in G, es gilt $|u_N(t) - u_0| \leq (t - t_0)M_R$ und

$$\|u_N\|_{0,1,\infty} \leq \max\{|u_0| + R, M_R\} .$$

1 Anfangswertaufgaben – Existenz und Eindeutigkeit

(1.7) Jede beschränkte Folge $\{v_N\colon N\in\mathbb{N}\}$ in $\mathrm{C}^{0,1}([t_0,t_0+T],\mathbb{R}^M)$ besitzt eine konvergente Teilfolge $\{v^{N_k}\colon k\in\mathbb{N}\}$ in $\mathrm{C}([t_0,t_0+T],\mathbb{R}^M)$, d. h. es existiert $v\in\mathrm{C}([t_0,t_0+T],\mathbb{R}^M)$ mit

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\|v_{N_k}-v\|_\infty=0\,.$$

(1.8) Die Folge $\{u_N\colon N\in\mathbb{N}\}$ aus (1.4) ist in $\mathrm{C}^{0,1}([t_0,t_0+T],\mathbb{R}^M)$ beschränkt. Sie besitzt eine konvergente Teilfolge, die gegen eine Lösung $u\in\mathrm{C}^1([t_0,t_0+T],\mathbb{R}^M)$ von (1.1) konvergiert.

(1.9) $f\in\mathrm{C}([t_0,t_0+T]\times G,\mathbb{R}^M)$ ist in der zweiten Komponente Lipschitz-stetig in G (erfüllt eine L-Bedingung), wenn $L>0$ existiert mit

$$|f(t,y)-f(t,z)|\le L\,|y-z|\,,\qquad t\in[t_0,t_0+T],\quad y,z\in G.$$

(1.10) Sei $f\in\mathrm{C}^1([t_0,t_0+T]\times\overline{G},\mathbb{R}^M)$, $G\subset\mathbb{R}^M$ beschränkt und konvex. Dann erfüllt f eine L-Bedingung in G.

(1.11) Seien $u,v\in\mathrm{C}^1([t_0,t_0+T],G)$ Lösungen von $\dot u(t)=f(t,u(t))$ und $\dot v(t)=f(t,v(t))$. Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann gilt

$$|u(t)-v(t)|\le\exp(L(t-t_0))\,|u(t_0)-v(t_0)|\,,\qquad t\in[t_0,t_0+T].$$

(1.12) Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann existiert ein $T>0$, so dass (1.1) eindeutig lösbar ist.

(1.13) Seien $w,a,b\colon[t_0,t_0+T]\longrightarrow\mathbb{R}_{\ge0}$ stückweise stetig, $0\le b(s)\le b(t)$ für $s<t$, und es gelte

$$d(t)\le\int_{t_0}^t a(s)d(s)\,ds+b(t),\qquad t\in[t_0,t_0+T].$$

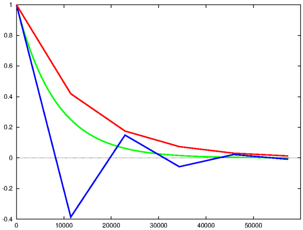
Dann gilt $d(t)\le b(t)\,\exp\Big(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\Big)$ für $t\in[t_0,t_0+T]$.

1 Anfangswertaufgaben – Radioaktiver Zerfall

Table: Vergleich der Konvergenzordnung $|c(t_n) - c_n| = O(N^{-\beta}) = O(h_N^\beta)$ im Zeitintervall $[0, 5730]$.

N	exakt	expliziter Euler	impliziter Euler	Mittelpunktsregel
4	0.50000	0.46711	0.52770	0.51266
8	0.50000	0.48431	0.51440	0.50323
16	0.50000	0.49233	0.50735	0.50081
32	0.50000	0.49621	0.50371	0.50020
64	0.50000	0.49811	0.50187	0.50005
		$O(1/N)$	$O(1/N)$	$O(1/N^2)$

$N = 5$



$N = 100$

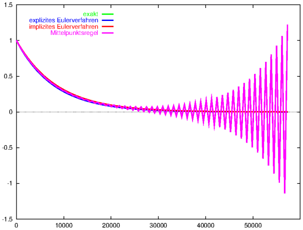


Figure: Stabilität der numerischen Approximation. Vergleich im Zeitintervall $[0, 57300]$ für $N = 5, 100$.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.1) Zur Funktion $f \in C([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ definieren wir den Fluss

$$\phi \colon \mathscr{D} \subset [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times G \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

durch $\phi(t, \tau, z) = v(t + \tau)$, wobei $v \in C^1([t, t + \tau], G)$ Lösung einer AWA ist:

$$\begin{aligned} \dot{v}(s) &= f\big(s, v(s)\big) \qquad s \in [t, t + \tau] \\ v(t) &= z \end{aligned}$$

Wenn f eine L-Bedingung erfüllt ist der Fluss eindeutig definitert.

(2.2) Ein Einschrittverfahren wird durch eine Verfahrensfunktion

$$\psi \colon [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times G \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

definiert: Zu Schrittweiten $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ und $u_0 \in G$ setze

$$u^n = u^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, u^{n-1}).$$

Wir setzen $|\tau| = \max_n \tau_n$. Der *diskrete Fluss* ist

$$\phi_\tau(t; \tau, z) = z + \tau \psi(t, \tau, z)\,.$$

(2.3) *Globaler Fehler:* $e^n = u(t_n) - u^n$

Lokaler Diskretisierungsfehler: $g^n = \dfrac{1}{\tau_n}\big(u(t_n) - u(t_{n-1})\big) - \psi\big(t_{n-1}, \tau_n, u(t_{n-1})\big)$

Es gilt $g^n = g(t_{n-1}, \tau_n, u(t_{n-1}))$ mit

$$g(t, \tau, z) = \frac{1}{\tau}\big(\phi(t, \tau, z) - z\big) - \psi(t, \tau, z) = \frac{1}{\tau}\big(\phi(t, \tau, z) - \phi_\tau(t, \tau, z)\big)\,.$$

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.3) Ein Einschrittverfahren heißt *konsistent*, wenn $\lim_{\tau \to 0} g(t, \tau, z) \longrightarrow 0$ gilt.

Es heißt *konsistent von der Ordnung p*, wenn $|g(t, \tau, z)| = O(\tau^p)$ gilt.

Es heißt *konvergent*, wenn $\lim_{\tau \to 0} \max_n |e^n| = 0$ gilt.

Es heißt *konvergent von der Ordnung p*, wenn $\max_n |e^n| = O(|\tau|^p)$ gilt.

(2.4) Wenn $\Lambda > 0$ existiert, so dass für die Verfahrensfunktion gilt

$$|\psi(t, \tau, z) - \psi(t, \tau, y)| \le \Lambda |z - y| \qquad t \in [t_0, t_0 + T], \quad \tau \le \tau_0, \quad z, y \in G\,,$$

dann gilt

$$|u(t_n) - u^n| \le |u(t_0) - u^0| \exp\big(\Lambda(t_n - t_0)\big) + \max_{j=1,\dots,n} |g^j| \, \frac{\exp\big(\Lambda(t_n - t_0)\big) - 1}{\Lambda}\,.$$

(2.6) Verfahren von der Konsistenzordnung p sind konvergent von der Ordnung p.

(2.7) Seien $\delta_n > 0,\ \mu_n, z_n \ge 0$ für $n = 0, \dots, N$ gegeben mit $z_n \le (1 + \delta_n) z_{n-1} + \mu_n$ für $n = 1, \dots, N$.
Dann gilt $z_n \le z_0 \exp \Delta_n + \max_{j=1,\dots,n} \frac{\mu_j}{\delta_j} \big(\exp(\Delta_n) - 1\big)$ mit $\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} \delta_j$.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.8) Ein allgemeines Runge-Kutta-Verfahren mit S Stufen wird durch

Stützstellen	$c \in \mathbb{R}^S$	$(c_1 = 0$ für explizite Verfahren$)$
Gewichte	$b \in \mathbb{R}^S$	$\big(\sum_{s=1}^{S} b_s = 1\big)$
Koeffizienten	$\mathscr{A} \in \mathbb{R}^{S,S}$	$(a_{sr} = 0$ für $s \le r$ für explizite Verfahren$)$

definiert:

$$\psi(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} b_s k_s \quad \text{mit} \quad k_s = f\Big(t + c_s\tau,\ z + \tau \sum_{r=1}^{s-1} a_{sr} k_r\Big)\,.$$

(2.9)
a) Ein explizites Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann konsistent, wenn $\sum_{s=1}^{S} b_s = 1$ gilt.

b) Wenn ein explizites Runge-Kutta-Verfahren die Konsistenzordnung p hat, dann gilt $p \le S$.

(2.10) Wenn für ein konsistentes Runge-Kutta-Verfahren $c_s = \sum_{r=1}^{S} a_{sr}$, $s = 1, \dots, S$ gilt, dann ist es invariant gegen Autonomisierung: Das Runge-Kutta-Verfahren für $\dot u(t) = f(t, u(t))$ in $\mathbb{R}^M$ entspricht dem Verfahren für $y(t) = F(y(t))$ mit $F(y) = (y_1, 1)$ und $y(t) = (u(t), t)$ in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}$.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.12) Ein Runge-Kutta-Verfahren ist genau dann konsistent und von der Ordnung

$$
\begin{array}{lll}
p=1, \text{ wenn} & \sum_s b_s = 1 & (1)\\
p=2, \text{ wenn zusätzlich} & \sum_s b_s c_s = \frac{1}{2} & (2)\\
p=3, \text{ wenn zusätzlich} & \sum_s b_s c_s^2 = \frac{1}{3} & (3)\\
 & \sum_{s,r} b_s a_{sr} c_r = \frac{1}{6} & (4)\\
p=4, \text{ wenn zusätzlich} & \sum_s b_s c_s^3 = \frac{1}{4} & (5)\\
 & \sum_{s,r} b_s c_s a_{sr} c_r = \frac{1}{8} & (6)\\
 & \sum_{s,r} b_s a_{sr} c_r^2 = \frac{1}{12} & (7)\\
 & \sum_{s,r,t} b_s a_{sr} a_{rt} c_t = \frac{1}{24} & (8)
\end{array}
$$

gilt.

(2.11) Wenn f eine L-Bedingung erfüllt, dann erfüllt die Verfahrensfunktion ψ für explizite Runge-Kutta-Verfahren eine Λ-Bedingung in (2.4).

(2.13) Ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^\top \\ \hline & \hat{b}^\top \end{array}$ definiert zwei Verfahrensfunktionen

$$\psi(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} b_s k_s\,, \qquad \hat{\psi}(t,\tau,z) = \sum_{s=1}^{S} \hat{b}_s k_s$$

und $\eta(t,\tau,z) = \psi(t,\tau,z) - \hat{\psi}(t,\tau,z)$ schätzt den lokalen Diskretisierungsfehler $g(t,\tau,z)$.

2 Explizite Einschritt-Verfahren

S0) Wähle $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$, $\theta \in (0,1)$, $\overline{M} > 0$, $\overline{\tau} > \underline{\tau} > 0$.
Setze $t := t_0$, $u := u_0$, $k_1 = f(t,u)$.

S1) Setze

$$\begin{aligned} k_2 &:= f\left(t + \frac{\tau}{2}, u + \frac{\tau}{2} k_1\right) \\ k_3 &:= f\left(t + \frac{\tau}{2}, u + \frac{\tau}{2} k_2\right) \\ k_4 &:= f(t + \tau, u + \tau k_3) \\ v &:= u + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_5 &:= f(t + \tau, v) \\ \eta &:= \frac{1}{6}(k_4 - k_5) \end{aligned}$$

S2) Falls $|\eta| < \varepsilon$, setze $t := t + \tau$, $t = \min\{t, t_0 + T\}$, $u := u + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, $k_1 := k_5$.

S3) Falls $t \geq t_0 + T$ oder $|u| > \overline{M}$ STOP.

S4) Setze $\tau := \theta \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{|\eta|}} \tau$.

Falls $\tau < \underline{\tau}$, setze $\tau := \underline{\tau}$ (oder STOP).

Falls $\tau > \overline{\tau}$ setze $\tau := \overline{\tau}$ und gehe zu S1).

2 Explizite Einschritt-Verfahren

(2.14) Sei f glatt und u Lösung einer AWA in $[t_0, t_0+T]$.
Sei ψ ein Verfahren der Ordnung p, und sei u_τ die diskrete Lösung.
Dann existieren glatte Funktionen $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots$ mit $a_j(t_0) = 0$ und

$$u_\tau(t) = u(t) + a_p(t)\tau^p + a_{p+1}(t)\tau^{p+1} + \cdots + O(\tau^{p+k})$$

für alle k und $t \in t_0 + \mathbb{N}_0\tau \cap [t_0, t_0+T]$.

(2.15) Für $\psi_2(t,\tau,z) = \psi(t+\tau/2, \tau/2, z + (\tau/2)\psi(t,\tau/2,z))$ gilt

a) Das extrapolierte Verfahren

$$\psi^{\text{ex}}(t,\tau,z) = \frac{1}{2^p-1}\Big(2^p\psi_2(t,\tau,z) - \psi(t,\tau,z)\Big)$$

hat die Konsistenzordnung $p+1$.

b) Der lokale Diskretisierungsfehler lässt sich durch

$$\eta(t,\tau,z) = \frac{1}{2^p-1}\Big(\psi_2(t,\tau,z) - \psi(t,\tau,z)\Big) = g(t,\tau,z) + O(\tau^{p+1})$$

schätzen.

Anwendung für $\psi(t,\tau,z) = f(t,z)$ und $p=1$: a_1 löst die lineare AWA

$$\dot a_1(t) = \frac{1}{2}\ddot u(t) + D_2 f(t,u(t))a_1(t)\,, \qquad a_1(0) = 0\,.$$

Für die Extrapolationen gilt

$$\begin{aligned} 2u_{\tau/2}(t) - u_\tau(t) &= u(t) - (1/2)a_2(t)\tau^2 + \cdots + O(\tau^{1+k})\,, \\ 8u_{\tau/4}(t) - 6u_{\tau/2}(t) - u_\tau(t) &= u(t) - (13/8)a_3(t)\tau^3 + \cdots + O(\tau^{1+k}) \qquad \dots \end{aligned}$$

2 Explizite Einschritt-Verfahren

Sei $\psi(t,\tau,z) = f(t,z)$, $\psi_2\big(t+\tau/2, \tau/2, z+(\tau/2)\,f(t,z)\big)$, und
$\psi_{2^{k+1}}(t,\tau,z) = \psi_{2^k}\big(t+\tau/2, \tau/2, z+(\tau/2)\psi_{2^k}(t,\tau/2,z)\big)$.

S0) Wähle $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$, $\theta \in (0,1)$, $\overline{\tau} > \underline{\tau} > 0$, $\overline{k} \geq 1$.
Setze $u := u_0$ und $t := t_0$.

S1) Berechne für $k = 1$

$$\begin{aligned} U_{00} &= u + \tau f(t,u) \\ U_{01} &= u + \tau\psi_2(t,\tau,u) \qquad U_{11} = 2U_{01} - U_{00}. \end{aligned}$$

S2) Berechne $\eta = \frac{1}{\tau}\frac{1}{2^k - 1}(U_{k-1,k} - U_{k-1,k-1})$.
Wenn $|\eta| < \varepsilon$, setze $u := U_{kk}$ und $t := t + \tau$ und gehe zu S5).

S3) Falls $k = \overline{k}$ gehe zu S5).

S4) Setze $k := k+1$ und berechne

$$\begin{aligned} U_{0k} &= u + \tau\psi_{2^k}(t,\tau,u), \\ U_{kj} &= \frac{1}{2^{k+1-j} - 1}(2U_{k,j-1} - U_{k-1,j-1}) \qquad (j = 1,\dots,k). \end{aligned}$$

Gehe zu S2).

S5) Setze $\tau := \theta\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{|\eta|}}\tau$.
Falls $\tau > \overline{\tau}$ setze $\tau := \overline{\tau}$ und falls $\tau < \underline{\tau}$, setze $\tau := \underline{\tau}$ (oder STOP).
Gehe zu S1).

3 Lineare Mehrschritt-Verfahren

(3.1) Zu $\tau > 0$ und $t_n = t_0 + n\tau$ seien $u_0, \dots, u_{k-1}$ Näherungen für die Lösung der AWA (1.1) zu den Zeitpunkten $t_0, \dots, t_{k-1}$. Ein lineares Mehrschrittverfahren definiert $u^k, \dots, u^n$ rekursiv durch

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j} u^{n-j} = \tau \sum_{j=0}^{k} \beta_{k-j} f^{n-j} \text{ für } n = k, \dots, N \text{ mit } f^j = f(t^j, u^j)\,.$$

(3.2) Für f sei eine L-Bedingung erfüllt, und sei $\tau L |\beta_k| < 1$. Dann konvergiert

$$u^{n,l} = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_{k-j} u^{n-j} + \tau \beta_k f(t_n, u^{n,l-1}) + \tau \sum_{j=1}^{k} \beta_{k-j} f^{n-j}$$

für jedes $u^{n,0} \in G$ gegen die Lösung des Mehrschrittverfahrens.

(3.3) Zu $u \in C^1([t_0, t_0 + T], G)$ definiere den *lokalen Diskretisierungsfehler*

$$g^n = \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j} u(t_{n-j}) - \sum_{j=0}^{k} \beta_{k-j} \dot{u}(t_{n-j})\,.$$

(3.4) Sei u analytisch. Dann gilt

$$g^n = \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} C_j \tau^j \Big(\frac{d}{dt}\Big)^j u(t_{n-k})$$

mit $C_0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i$ und $C_j = \frac{1}{j!} \sum_{l=0}^{k} l^j \alpha_l - \frac{1}{(j-1)!} \sum_{l=0}^{k} l^{j-1} \beta_l$ für $j > 0$. Ein Verfahren ist konsistent von der Ordnung p, wenn $C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0,\ C_{p+1} \neq 0$. C_{p+1} heißt *Fehlerkonstante*.

3 Lineare Mehrschritt-Verfahren

(3.5) Ein Mehrschrittverfahren ist konsistent von der Ordnung p, wenn der lokale Diskretisierungsfehler für Polynome vom Grad p verschwindet.

(3.7) Sei $\chi(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i = \prod_{\nu=1}^{r} (\lambda - \lambda_\nu)^{m_\nu}$ mit $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$ für $\nu \neq \mu$ und $\sum_{\nu=1}^{r} m_\nu = k$. Dann hat jede Lösung $(z_n)_{n=0,1,2,\dots}$ der linearen Differenzengleichung $\sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} z_{n-i} = 0$ $(n \geq k)$ die Form
$z_n = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_{\nu-1}} c_{\nu,j} \frac{n!}{(n-j)!} \lambda_\nu^n$. Die Koeffizienten $c_{\nu,j}$ sind durch $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$ bestimmt.

(3.8) Zu einem Mehrschrittverfahren definiere das *charakteristische Polynom* $\chi(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j$.

(3.9) Ein Mehrschrittverfahren heißt *stabil* (0-stabil), wenn für alle Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms gilt: $|\lambda_i| \leq 1$, und alle Nullstellen mit $|\lambda_i| = 1$ sind einfach.

(3.10) Wenn ein Mehrschrittverfahren nicht stabil ist, dann ist die diskrete Lösung für $\tau \to 0$ für fast alle Anfangswerte unbeschränkt.

(3.11) Sei $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ eine Matrix mit Spektralradius $\rho = \rho(A)$, und für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = \rho$ die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit. Dann existiert eine symmetrisch positiv definite Matrix $S \in \mathbb{R}^{k,k}$ mit $|Az|_S \leq \rho |z|_S = \rho \sqrt{z^T S z}$ für $z \in \mathbb{R}^k$.

3 Lineare Mehrschritt-Verfahren

(3.12) Sei $u \in C^1([t_0, t_0 + T], G)$ Lösung der Anfangswertaufgabe (1.1)), für f sei eine Lipschitz-Bedingung mit $L > 0$ erfüllt. Sei $\tau_0 > 0$ mit $\tau_0 L|\beta_k| < 1$ und $\tau \in (0, \tau_0]$. Dann gilt für ein konsistentes und stabiles Mehrschrittverfahren

$$|u^n - u(t_n)| \le K^* \Bigg(\max_{i=0,\dots,k-1} |u^i - u(t_i)| \exp\big(L^*(t_n - t_k)\big) + \max_{i=k,\dots,n} |g^i| \frac{\exp\big(L^*(t_n - t_k)\big) - 1}{L^*} \Bigg)$$

für $n \ge k$ und Konstanten $K^*, L^* > 0$.

(3.13) Wenn ein stabiles Mehrschrittverfahren konsistent von der Ordnung p ist und $u^1, \dots, u^{k-1}$ mit einem Verfahren der Ordnung $p - 1$ berechnet werden gilt $|u(t_n) - u^n| = O(\tau^p)$.

Beispiele

A) Explizite Mittelpunktsregel
$n > 0$: $u^1 = u^0 + \tau f(t_0, u^0)$
$n \ge 1$: $u^n = u^{n-2} + 2\tau f^{n-1}$

B) BDF(2)
$n > 0$: löse $0 = u^1 - u^0 - \tau f(t_1, u^1)$
$n \ge 1$: löse $0 = \frac{3}{2} u^n - 2u^{n-1} + \frac{1}{2} u^{n-2} - \tau f(t_n, u^n)$

4 Steife Differentialgleichungen

(4.1) Die Lösung einer AWA $\dot{u} = f(t,u)$ in $[0,\infty)$ mit $u(0) = u_0$ heißt *stabil*, wenn für alle u_0

$$|u(t)| \le C\,|u_0|$$

gilt, und *asymptotisch stabil*, wenn für alle u_0 gilt

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} |u(t)| = 0\,.$$

(4.2) Für lineare AWA hat ein Runge-Kutta-Verfahren die Form $u^n = R(\tau_n A)u^{n-1}$ mit

$$R(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} \qquad \text{und Polynomen} \qquad P,Q \in \mathbb{P}_S\,.$$

Für explizite Verfahren ist R ein Polynom.

Wenn das Verfahren die Ordnung p hat, gilt: $R(\zeta) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!}\zeta^j + O(\zeta^{p+1})$.

(4.3) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt *A-stabil*, wenn die linke Halbebene

$$\mathbb{C}_- = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\, Re(\zeta) \le 0\} = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\, |\exp(\zeta)| \le 1\}$$

im Stabilitätsgebiet $S = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\, |R(\zeta)| \le 1\}$ enthalten ist.

(4.4) Für A-stabile Runge-Kutta-Verfahren gilt: Wenn die lineare AWA stabil ist, dann ist auch die numerische Lösung $u^n = R(\tau A)^n u^0$ stabil mit $|u^n| \le C\,|u^0|$ für alle Schrittweiten $\tau > 0$.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.5) Ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren heißt *L-stabil*, wenn für die rationale Funktion $R(\infty) = \lim_{|\zeta|\to\infty} R(\zeta) = 0$ gilt.

(4.6) Sei $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \end{array}$ ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren mit $a_{Sr} = b_r$, $r = 1, ..., S$, und sei $\mathscr{A}$ invertierbar. Dann ist das Verfahren L-stabil.

(4.7) $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ ist genau dann schiefsymmetrisch (d. h. $A^T = -A$), wenn $\exp(tA)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal ist, d. h. $\exp(tA)\exp(tA)^T = I_M$.

(4.8) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt *reversibel*, wenn $R(\zeta)\,R(-\zeta) \equiv 1$.

(4.9) Sei R rationale Funktion zu einem Runge-Kutta-Verfahren mit $R(\zeta) = 1 + \zeta + O(\zeta^2)$, und R habe keine Polstelle in $\mathbb{C}_-$. Dann ist äquivalent:

a) $S = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon |R(\zeta)| \le 1\} = \mathbb{C}_-$
b) $|R(\zeta)| = 1$ für $\mathrm{Re}(\zeta) = 0$
c) $R(\zeta)\,R(-\zeta) \equiv 1$

(4.10) Sei $A^T = -A$ schiefsymmetrisch und sei R rationale Funktion eines Runge-Kutta-Verfahrens mit $S = \mathbb{C}_-$. Dann gilt:
$R(\tau A)$ ist orthogonal und $|u^n|_2 = |u^{n-1}|_2$ für $u^n = R(\tau A)u^{n-1}$.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.12) Eine Funktion $f \in C([t_0, t_0+T] \times G, \mathbb{R}^M)$ heißt *monoton* (in der zweiten Komponente), wenn bzgl. einem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$

$$\big(f(t,z) - f(t,y), z - y\big) \geq 0 \qquad t \in [t_0, t_0+T], \quad z, y \in G.$$

gilt.

(4.11) Eine AWA $\dot{u}(t) = f\big((t, u(t)\big)$, $t \in [t_0, t_0+T]$ heißt dissipativ, wenn $-f$ monoton ist. Dann gilt für jede weitere Lösung $\dot{v}(t) = f\big((t, v(t)\big)$

$$|u(t) - v(t)| \leq |u(t_0) - v(t_0)|, \qquad t \in [t_0, t_0+T].$$

(4.12) Ein Einschrittverfahren ψ heißt *B-stabil*, wenn für dissipative AWA

$$|u^n - v^n| \leq |u^{n-1} - v^{n-1}|$$

mit $u^n = u^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, u^{n-1})$ und $v^n = v^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, v^{n-1})$ gilt.

(4.13) B-stabile Runge-Kutta-Verfahren sind A-stabil.

(4.14) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt algebraisch stabil, wenn

a) $\mathscr{M} = \mathrm{diag}(b_s)\mathscr{A} + \mathscr{A}^T \mathrm{diag}(b_s) - bb^T$ positiv semidefinit
b) $b_s \geq 0$

(4.15) Algebraisch stabile Runge-Kutta-Verfahren sind B-stabil.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.16) Zu Stützstellen $0 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_S \leq 1$ definieren wir ein *Kollokationsverfahren* durch: Bestimme ein Polynom $P \in \mathbb{P}_S(\mathbb{R}^M)$ mit $P(t_{n-1}) = u^{n-1}$ und

$$\frac{d}{dt}P(t_{n,s}) = f(t_n, P(t_{n,s})) \quad \text{für} \quad t_{n,s} = t_{n-1} + c_s\tau_n\,, \qquad s = 1,...,S$$

und setze $u^n = P(t_n)$ (falls diese Interpolationsaufgabe lösbar ist).

(4.17) Das Kollokationsverfahren ist ein Runge-Kutta-Verfahren mit

$$b_s = \int_0^1 L_s(t)dt \;\text{ und }\; a_{sr} = \int_0^{c_s} L_r(t)dt \;\text{ für }\; L_s(t) = \prod_{\substack{r=1\\ r\neq s}}^{S} \frac{t-c_r}{c_s-c_r}.$$

(4.18) Wenn die Quadratur (c_s, b_s) die Fehlerordnung p hat (d.h., die Quadratur ist für Polynome von Grad $p-1$ exakt), dann hat auch das Kollokationsverfahren die Ordnung p. Für die Gauß-Quadratur gilt $p = 2S$.

(4.19) Die Kollokationsverfahren zur Gauß- und Radau-Quadratur sind B-stabil.

(4.20) Das Kollokationsverfahren zur Gauß-Quadratur ist reversibel.
Wenn die Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ ein quadratisches erstes Integral

$$\mathscr{E}(z) = z^T Qz + b^T z + e$$

erhält, d.h., $\mathscr{E}(u(t)) \equiv$ const., dann gilt auch für das Gauß-Verfahren $\mathscr{E}(u^n) = \mathscr{E}(u^{n-1})$.

4 Steife Differentialgleichungen – DAE-Systeme

(4.21) Seien f, g stetig differenzierbar und $D_3 g(t_0, u_0, v_0)$ invertierbar. Betrachte

$$\dot{u} = f(t,u,v), \qquad 0 = g(t,u,v), \qquad u(t_0) = u_0,\ v(t_0) = v_0,\ g(t,u_0,v_0) = 0\ .$$

Dann existiert $T > 0$, sodass die DAE in $[t_0, t_0 + T]$ eindeutig lösbar ist.

(4.22) Sei $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \end{array}$ ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p mit $a_{Sr} = b_r$ und

$$\begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{n-1} \\ v^{n-1} \end{pmatrix} + \tau \sum_{s=1}^{S} b_s \begin{pmatrix} k_s \\ \ell_s \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{pmatrix} k_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_{n,s}, u^{n,s}, v^{n,s}) \\ g(t_{n,s}, u^{n,s}, v^{n,s}) \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} u^{n,s} &= u^{n-1} + \tau_n \sum a_{sr} k_r\,, \\ v^{n,s} &= v^{n-1} + \tau_n \sum a_{sr} \ell_r\,. \end{aligned}$$

Dann gilt $\big|(u^n, v^n) - (u(t_n), v(t_n))\big| = O(\tau^p)$.

(4.23) Sei zusätzlich $\mathscr{A}$ invertierbar. Dann konvergiert die Runge-Kutta-Lösung zu

$$\dot{u}^\varepsilon = f(t,u^\varepsilon,v^\varepsilon), \quad \varepsilon\dot{v}^\varepsilon = g(t,u^\varepsilon,v^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(t_0) = u_0,\ v^\varepsilon(t_0) = v_0,\ g(t,u_0,v_0) = 0$$

für $\varepsilon \longrightarrow 0$ gegen die Lösung von (4.22).

5 Randwert-Aufgaben: Lineare Randwertaufgaben

(5.1) Zu $I = [\alpha, \beta]$, $A \in C(I, \mathbb{R}^{M,M})$, $b \in C(I, \mathbb{R}^M)$, $B_\alpha, B_\beta \in \mathbb{R}^{M,M}$, $g \in \mathbb{R}^M$ betrachte die allgemeine inhomogene lineare RWA $\dot{u}(t) = A(t)u(t) + b(t)$ für $t \in I$ und $B_\alpha u(\alpha) + B_\beta u(\beta) = g$.

(5.2) Sei $u^0 \in C^1(I)$ Lösung der inhomogenen AWA $\dot{u}^0(t) = A(t)u^0(t) + b(t)$ mit $u^0(\alpha) = 0$, und für $m = 1, ..., M$ seien $u^m \in C^1(I)$ Lösungen der AWA $\dot{u}^m(t) = A(t)u^m(t)$ mit $u^m(\alpha) = e^m$.
Dann ist $U(t) = \big(u^1(t), \ldots, u^M(t)\big)$ ein Fundamentalsystem, und für jede Lösung von (5.1) gilt

$$u(t) = u^0(t) + \sum_{m=1}^{M} y_m u^m(t)$$

mit $y \in \mathbb{R}^M$ als Lösung von $\big(B_\alpha + B_\beta U(\beta)\big)y = g - B_b u^0(\beta)$.
Also gilt: Entweder, $Q := B_\alpha + B_b U(\beta)$ ist regulär (und damit (5.1) eindeutig lösbar), oder Q ist singulär, d. h. falls $Qy = g - B_b u^0(\beta)$ lösbar ist, ist die Lösung nicht eindeutig, und sonst existiert keine Lösung (Fredholmsche Alternative).

(5.3) Sei u_τ^0 diskrete Lösung der AWA $\dot{u}^0 = Au^0 + b$ mit $u^0(\alpha) = 0$, und seien u_τ^m diskrete Lösungen der AWA $\dot{u}^m = Au^m, u^m(\alpha) = e^m$ für $m = 1, \ldots, M$. Sei $y_\tau \in \mathbb{R}^M$ Lösung von $Q_\tau y_\tau = g - B_b u_\tau^0(b)$ mit $Q_\tau = B_\alpha + B_\beta U_\tau(\beta)$ und $U_\tau = (u_\tau^1, \ldots, u_\tau^M)$, und sei $u_\tau = u_\tau^0 + \sum_{m=1}^M y_{\tau,m} u_\tau^m$. Es gelte $|u^m(t_n) - u_\tau^m(t_n)| = O(\tau^p)$ für $m = 0, \ldots, m$, $t_n = \alpha + n\tau$.
Dann gilt: Wenn $Q = B_\alpha + B_\beta U(\beta)$ regulär ist, dann existiert ein $\tau_0 > 0$, sodass Q_τ für $\tau < \tau_0$ regulär ist, und es gilt für die Lösung der RWA

$$|u(t_n) - u_\tau(t_n)| = O(\tau^p)\,.$$

5 Randwert-Aufgaben: Schieß-Verfahren

(5.4) Seien $I = [\alpha, \beta]$, $f \in C(I \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$ und $g \in C(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$ gegeben.
Dann lautet die allgemeine RWA:
Bestimme $u \in C^1(I, \mathbb{R}^M)$ mit $\dot{u} = f(t, u)$ in $I = [\alpha, \beta]$ und $g\big(u(\alpha), u(\beta)\big) = 0$.

(5.5) Sei $f \in C^1(I \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$. Dann ist die Lösung $u(\cdot; v)$ der AWA $\dot{u}(t; v) = f(t, u(t; v))$ mit $u(\alpha; v) = v$ nach v differenzierbar mit $J(t) = D_v u(t; v) \in C^1(I, \mathbb{R}^{M,M})$.
J erfüllt die lineare Matrix - AWA

$$\dot{J}(t) = D_2 f\big(t, u(t; v)\big) J(t) \qquad J(\alpha) = I_M$$

und es gilt $J(t)e^k = \lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{1}{\delta} \Big(u(t; v + \delta e^k) - u(t; v) \Big)$.

Schieß-Verfahren für allgemeine RWA

S0) wähle Startwert $v \in \mathbb{R}^M$

S1) berechne Approximation u^v der AWA mit $\dot{u}(t; v) = f(t, u(t; v))$ und $u(\alpha; v) = v$
berechne $G(v) := g\big(v, u(\beta; v)\big)$
falls $|G(v)|$ klein genug: STOP

S2) berechne eine Approximation $\triangle G$ von $DG(v)$ spaltenweise:

Für $\delta > 0$ und e^k setze $\triangle G(v)e^k = \dfrac{1}{\delta} \big(G(v + \delta e^k) - G(v) \big)$

S3) berechne $v := v - \big(\triangle G(v)\big)^{-1} G(v)$. Gehe zu S1).

5 Randwert-Aufgaben: Mehrzielmethode

S0) Wähle eine Zerlegung $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_R = \beta$.
Wähle Startwerte $v = (v^0, ..., v^R) \in \mathbb{R}^{M(R+1)}$.

S1) berechne Approximation u^r der AWA mit

$$\dot{u}^r = f(t, u^r), \quad u^r(t_{r-1}) = v^{r-1}.$$

berechne $G(v) := (G_r(v))_{r=0,...,R}$ mit $G_0(v) = g(v^0, v^R)$ und
$G_r(v) = u^r(t_r) - v^r$ für $r = 1, ..., R$.
falls $|G(v)|$ klein genug: STOP

S2) berechne eine Approximation $\triangle G(v)$ von $G'(v)$.

S3) berechne $v := v - \big(\triangle G(v)\big)^{-1} G(v)$. Gehe zu S1).

(5.5) Für lineare RWA $\dot{u} = Au + f$ mit $B_\alpha u(\alpha) + B_\beta u(\beta) = g$ gilt:
Wenn die RWA eindeutig lösbar ist, dann ist die Matrix $DG(v)$ regulär.

Für allgemeine RWA $\dot{u} = f(t, \dot{u})$ mit $g(u(\alpha), u(\beta)) = 0$ gilt:
Wenn die RWA eine isolierte Lösung besitzt und f, g hinreichend glatt sind,
dann ist G differenzierbar und die Matrix $DG(v)$ in einer Umgebung der Lösung regulär.

6 Finite Differenzen

(6.1) Für $\partial_h^+ u(x) = \frac{1}{h}\big(u(x+h) - u(x)\big)$ gilt $|\partial_h u(x) - u'(x)| \le \frac{1}{2}\, h \|u''\|_\infty$.
Für $\partial_h u(x) = \frac{1}{2h}\big(u(x+h) - u(x-h)\big)$ gilt $|\partial_h u(x) - u'(x)| \le \frac{1}{6}\, h^2 \|u'''\|_\infty$.
Für $\partial_{h/2}^2 u(x) = \frac{1}{h^2}\big(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\big)$ gilt $|\partial_{h/2}^2 u(x) - u''(x)| \le \frac{1}{12}\, h^2 \|u''''\|_\infty$.

(6.2) Sei $\bar\Omega = [\alpha,\beta]$ ein Intervall, $p \in \mathrm{C}^1(\alpha,\beta)$ mit $p(x) > 0$ und $q, r \in C(\alpha,\beta)$. Für $u \in \mathrm{C}^2(\alpha,\beta) \cap \mathrm{C}[\alpha,\beta]$ ist $Lu = -(pu')' + qu' + ru$ der Sturm-Liouville-Operator.

(6.3) Sei $N > 0$ und $h = \dfrac{\beta-\alpha}{N+1}$, $x_n = \alpha + nh$, $\triangle = \{x_0, \dots, x_{N+1}\}$.
Zu einer Gitterfunktion $u^h \colon \triangle \to \mathbb{R}^{N+2}$ betrachte die *Differenzengleichung* $L_h u^h = f^h$ mit

$$L_h u^h(x_n) = -\partial_{h/2}(p\partial_{h/2} u^h)(x_n) + q(x_n)\partial_h u^h(x_n) + r(x_n) u^h(x_n)\,, \quad n = 1, \dots, N$$

und $u_0 = u_{N+1} = 0$. Setze $\|u^h\|_{\infty,\triangle} := \max\limits_{1\le n\le N} |u^h(x_n)|$.

(6.4)
a) Ein Differenzenverfahren heißt konsistent von der Ordnung p, wenn für die Interpolation $I_h u$ $\big($mit $(I_h u)(x_n) = u(x_n)\big)$ der exakten Lösung u gilt:
$$\|L_h(I_h u) - I_h L u\|_{\infty,\triangle} = O(h^p)\,.$$
b) Es heißt stabil, wenn $\|L_h^{-1}\|_{\infty,\triangle} \le C$ unabhängig von $0 < h < h_0$.

(6.5) Das Differenzenverfahren (6.3) sei konsistent von der Ordnung p und stabil.
Dann ist es konvergent, d.h. $\|u^h - u\|_{\infty,\triangle} = O(h^p)$ für $h \to 0$.

6 M-Matrizen

Für $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ gelte:

a) A ist stark *diagonal dominant*, d.h.

$$\sum_{k=1,k\neq n}^{N} |A[n,k]| \leq |A[n,n]|, \qquad n = 1,\dots,N$$

und es existiert ein $j \in \{1,\dots,N\}$ mit

$$\sum_{k=1,k\neq j}^{N} |A[j,k]| < |A[j,j]|.$$

b) A ist *irreduzibel*, d.h. zu jedem Paar $j \neq n$ existiert eine Folge $j = j_0, j_1, j_2, \dots, j_R = n$ mit

$$A[j_1,j_0] \neq 0,\ A[j_2,j_1] \neq 0, \dots,\ A[j_R,j_{R-1}] \neq 0.$$

Dann gelten:

1) A ist regulär.
2) Falls $A[n,n] > 0$ für $n = 1,\dots,N$, dann ist A positiv definit, d.h., $z^\top Az > 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.
3) Falls $A[n,n] > 0$ und $A[n,k] \leq 0$ für $n,k = 1,\dots,N$ und $n \neq k$, dann gilt $A^{-1} \geq 0$, d.h. $A^{-1}[n,k] \geq 0$ für alle $n,k = 1,\dots,N$.

   Eine solche Matrix heißt *M-Matrix*.

6 Finite Differenzen

Betrachte die elliptische Gleichung $u = f$ in $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$.
Definiere zur Schrittweite $h > 0$

$$\Delta_h u(x_1,x_2) = \frac{1}{h^2}\Big(4u(x_1,x_2) + u(x_1-h,x_2) + u(x_1+h,x_2) + u(x_1,x_2-h) + u(x_1,x_2+h)\Big)\,.$$

Sei $\Omega_h = h\mathbb{Z}^2 \cap \Omega$, $\bar\Omega_h = h\mathbb{Z}^2 \cap \bar\Omega$, $\partial\Omega_h = h\mathbb{Z}^2 \cap \partial\Omega$.
Für Gitterfunktionen $V^h = \{u^h \colon \bar\Omega_h \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $u^h(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega_h\}$ definiere

$$\|u^h\|_{\infty,\Omega_h} = \max_{x\in\Omega_h} |u^h(x)|\,.$$

(6.6) Wenn u genügend glatt ist, dann gilt $|u^h(x) - u(x)| \le Ch^2\big(\|\partial_1^4 u\|_\infty + \|\partial_2^4 u\|_\infty\big)$ für $x \in \Omega_h$.

Nun betrachte die parabolische Gleichung $\dot u - \Delta u = f$ in $\Omega \times (0,T)$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und dem Anfangswert $u(0) = u_0$.

Zur Zeitschrittweite $t > 0$ und $t_n = n\tau$ definiere $f^{h,n}(x) = f(x,t_n)$ für $x \in \Omega_h$ und

$$\frac{1}{\tau}\Big(u^{h,n} - u^{h,n-1}\Big) - \Delta_h u^{h,n} = f^{h,n}\,, \qquad u^{h,0} = u_0(x)\,.$$

(6.7) Wenn u genügend glatt ist, dann gilt für $x \in \Omega_h$ im Zeitschritt n

$$|u^{h,n}(x) - u(x,t_n)| \le Ct_n(\tau + h^2)\big(\|\partial_1^u\|_\infty + \|\partial_2^u\|_\infty + \|\partial_t^2 u\|_\infty\big)\,.$$

6 Finite Differenzen

Betrachte die hyperbolische Gleichung $-\rho\ddot{u} - \operatorname{div}\kappa\nabla u = 0$ in $(0,1)^2 \times (0,T)$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Sei $c = \sqrt{\rho/\kappa}$ die Wellengeschwindigkeit und $y = (v,\sigma)$ mit $v = \dot{u}$ und $\sigma = \kappa\nabla u$, d.h.

$$\begin{aligned} \rho\dot{v} &= \operatorname{div}\sigma\,, \\ \kappa^{-1}\dot{\sigma} &= \nabla v\,. \end{aligned}$$

Definiere zu Schrittweiten $h > 0$ und $\tau > 0$ die Punkte $x_{j,k} = (jh, kh)$ und $t_n = n\tau$ für $j,k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$. Nun approximiere v an x_{jk} zum Zeitpunkt t_n, σ_1 an $x_{j+1/2,k}$ zum Zeitpunkt $t_{n+1/2}$ und σ_2 an $x_{j,k+1/2}$ zum Zeitpunkt $t_{n+1/2}$ mit zentralen Differenzen:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho}{\tau}\left(v_{jk}^n - v_{jk}^{n-1}\right) &= \frac{1}{h}\left(\sigma_{j+1/2,k}^{n-1/2} - \sigma_{j-1/2,k}^{n-1/2}\right) \qquad + \frac{1}{h}\left(\sigma_{j,k+1/2}^{n-1/2} - \sigma_{j,k-1/2}^{n-1/2}\right) \\
\frac{1}{\kappa\tau}\left(\sigma_{j+1/2,k}^{n+1/2} - \sigma_{j+1/2,k}^{n-1/2}\right) &= \frac{1}{h}\left(v_{j+1,k}^n - v_{jk}^n\right) \qquad \frac{1}{2}\left(\sigma_{j+1/2,k}^{1/2} + \sigma_{j+1/2,k}^{-1/2}\right) = \sigma_{j+1/2,k}^0 \\
\frac{1}{\kappa\tau}\left(\sigma_{j,k+1/2}^{n+1/2} - \sigma_{j,k+1/2}^{n-1/2}\right) &= \frac{1}{h}\left(v_{j,k+1}^n - v_{jk}^n\right) \qquad \frac{1}{2}\left(\sigma_{j+1/2,k}^{1/2} + \sigma_{j+1/2,k}^{-1/2}\right) = \sigma_{j+1/2,k}^0
\end{aligned}$$

Definiere $\mathscr{E}^n = \frac{1}{2}h^2\sum_{jk}\left(\rho|v_{jk}^n|^2 + \kappa^{-1}\sigma_{j+1/2,k}^{n+1/2}\sigma_{j+1/2,k}^{n-1/2} + \kappa^{-1}\sigma_{j,k+1/2}^{n+1/2}\sigma_{j,k+1/2}^{n-1/2}\right)$.

(6.8) Es gilt $\mathscr{E}^n = \mathscr{E}^{n-1}$.

(6.9) Sei $\theta = ct/h < 1/2$. Dann gilt $\mathscr{E}^n > 0$.

(6.10) Sei $\theta = ct/h < 1/2$. Wenn die Lösung (p,σ) genügend glatt ist, gilt für den Fehler $O(\tau^2 + h^2)$, und der Fehler wächst in der Zeit mit t_n.

7 Variationsmethoden

Zu einer Zerlegung $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{K+1} = \beta$ definiere $h = \max_k x_k - x_{k-1}$ und

$$V_h = \{v_h \in C[\alpha,\beta] \colon v_h(\alpha) = v_h(\beta) = 0 \;\text{ und }\; v_h|_{[x_{k-1},x_k]} \in \mathbb{P}_1\}\,.$$

Zu $p,q,r \colon (\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiere

$$a(v,w) = \sum_{k=1}^{K+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (pv'w' + qv'w + rvw)\,dx\,, \qquad \ell(v) = \int_\alpha^\beta fv\,dx\,.$$

Dann gilt für jede Lösung u von $-(pu')' + qu' + ru = f$ und jede Testfunktion v mit $v(\alpha) = v(\beta) = 0$

$$a(u,v) = \ell(v)\,.$$

(7.1) Sei $\|v\|_0 = \int_\alpha^\beta |v|^2\,dx$ die Norm in $L_2(\alpha,\beta)$, und sei $\|v\|_1 = \sqrt{\|v'\|_0^2 + \|v\|_0^2}$.

a) Sei $C_P = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Es gilt $\|v_h\|_0 \le C_P\,\|v_h'\|_0$ für $v_h \in V_h$.
b) Es gilt $|\ell(v_h)| \le \|f\|_0\|v_h\|_0$ für $v_h \in V_h$.
c) Es existiert $C_a \ge 0$ mit $|a(v_h,w_h))| \le C_a\|v_h'\|_0\|w_h'\|_0$ für $v_h, w_h \in V_h$.
d) Sei zusätzlich $p - \rho_0 > \rho_1 > 0$ und $\rho_0 + C_P(r - \frac{1}{2}q') > \rho_1$.
Dann existiert $c_0 > 0$ mit $|a(v_h,v_h)| \le c_0\,\|v_h'\|_0^2$ für $v_h \in V_h$.

Unter der Bedingung d) existiert eine eindeutige *Galerkin-Approximation* $u_h \in V_h$ von

$$a(u_h,v_h) = \ell(v_h) \qquad v_h \in V_h\,.$$

(7.2) Es gilt $\|u - u_h\|_1 \le C \;\inf_{\,v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1\,.$

7 Variationsmethoden

Sei $V = \{v \in C[\alpha,\beta] \colon v(x) = \int_\alpha^x w(y)\,dy \text{ mit } w \in L_2(\alpha,\beta) \text{ und } v(\beta) = 0\}$.

(7.3) V ist ein Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|_1$, und es gilt $\|v\|_0 \le \|v'\|_0$ für alle $v \in V$.

(7.4) Seien $a(\cdot,\cdot)$ und $\ell(\cdot)$ beschränkt in V, und $a(\cdot,\cdot)$ sei elliptisch, d.h. $a(v,v) \ge c_0\|v\|_1^2$ für $v \in V$. Dann existiert eine Lösung $u \in V$ von $a(u,v) = \ell(v)$ für $v \in V$.

(7.5) Sei zusätzlich $u'' \in L_2(\alpha,\beta)$. Dann gilt $\|u - u_h\|_1 \le Ch\|u''\|_0$.

(7.5) Wenn zusätzlich $p, p', q, r \in C[\alpha,\beta]$, dann existiert $C > 0$ mit $\|u''\|_0 \le \|f\|_0$ mit C unabhängig von f, und es gilt $\|u - u_h\|_0 \le Ch^2\|u''\|_0$.

Nun betrachte $-\varepsilon u'' + u' + u = f$. Zu $\delta > 0$ definiere

$$a_\delta(v,w) = \int_\alpha^\beta \big(\varepsilon v'w' + (v'+v)(w+\delta w')\big)\,dx\,, \qquad \ell_\delta(v) = \int_\alpha^\beta f(v+\delta v')\,dx\,.$$

(7.6) Sei $h \ge \varepsilon$ und $\delta = h \le 1$. Dann gilt $\|u - u_h\|_\delta \le Ch^{3/2}\|u''\|_0$.