Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Martin Sauter

Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 1

Wintersemester 2010/2011 — 20.10.2010

Aufgabe 1 **(schriftlich – 3 Punkte)**

Sei $J \in C^1(\mathbb{R})$. Betrachten Sie auf $\mathbb{R} \times [0,T]$ die skalare Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u + J'(u)\partial_x u = 0\,,$$

für $u \equiv u(x,t)$. Eine Charakteristik $\chi \in C^1[0,t_\chi]$ zu einer Lösung u durch den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist charakterisiert als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\chi'(t) = J'(u(\chi(t),t))$, $\chi(0) = x_0$.

(a) Zeigen Sie, dass alle Charakteristiken gerade Linien sind, d.h. die Charakteristiken haben die Form $\chi(t) = k\,t + \chi(0)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen k und J.

(b) Sei nun $J(u) = \frac{1}{2}u^2$ (Burger's Gleichung) und $u(x,0) = u_0(x)$, wobei $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. χ sei eine Charakteristik durch den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung u dann implizit durch

$$u(\chi,t) = u_0(\chi - tu(\chi,t))$$

charakterisiert ist. Zeigen Sie durch Ableiten dieser Beziehung zudem, dass bei $t^* = -\big(\sup_{x_0\in\mathbb{R}} u'(x_0)\big)^{-1}$ ein Schock entsteht, d.h. u nicht mehr differenzierbar bzgl. x ist.

Aufgabe 2 **(schriftlich – 3 Punkte)**

Sei $\Omega = [0,L]$ und betrachten Sie auf $\Omega \times [0,T]$ die lineare, skalare Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0\,,$$

für $u \equiv u(x,t)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und periodischen Randbedingungen, d.h. $u(0,t) = u(L,t)$. Auf Ω sei das Gitter $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_J < x_{J+1} = L$, durch $x_j = j\,h$ mit $h = \frac{L}{J+1}$ definiert. Diskretisieren Sie die Ortsableitung mit zentralen Differenzen, d.h. $\partial_x u(x_j,t) \approx \frac{1}{2h}(u(x_{j+1},t) - u(x_{j-1},t))$, und stellen Sie das zugehörige System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen auf.

Aufgabe 3 **(mündlich)**

Betrachten Sie nochmals die Problemstellung aus Aufgabe 2 mit den Parameter $L = 1$, $a = 1$, $T = 1$ und $u_0(x) = \sin(2\pi x)$. Da die Lösung periodisch ist, gilt $u(x,T) = u_0(x)$. Zur Zeitdiskretisierung sei $[0,T]$ via $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ aufgeteilt, wobei $t_n = n\,\tau$, $\tau = \frac{T}{N}$. Die Approximation von $u(x_j,t_n)$ sei mit U_j^n bezeichnet. Implementieren Sie folgende Verfahren:

(a) Explizites Euler-Verfahren: $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a\,\tau}{2h}\big(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\big)$.

(b) Lax-Friedrich-Verfahren: $U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{a\,\tau}{2h}\big(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\big)$.

(c) Mittelpunktregel: $U_j^{n+1} = U_j^{n-1} - \frac{a\,\tau}{h}\big(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\big)$, wobei im ersten Schritt ein expliziter Euler-Schritt durchgeführt werden soll.

Halten Sie dabei das Verhältnis $\frac{\tau}{h}$ (Zeitschrittweite/Ortsschrittweite) konstant. Welche Verfahren sind stabil und welche Konvergenz-Ordnung können Sie bei den stabilen Verfahren beobachten?

Testen Sie die Verfahren auch mit dem Startwert

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & , \frac{2}{5} < x < \frac{3}{5}\,, \\ 0 & , \text{sonst}. \end{cases}$$

Was beobachten Sie in diesem Fall?

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 25.10.2010, 15.45 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik IV" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Literatur:
Knabner/Angermann: Numerik partieller Differentialgleichungen.
Braess: Finite Elemente.
Monk: Finite Element Method for Maxwell's Equation.
Grossmann/Roos/Stynes: Numerical Treatment of Partial Differential Equations.
Ern/Guermond: Theory and Practice of Finite Elements.
Ciarlet: The finite element method for elliptic problems.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.