Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Martin Sauter

Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 2

Wintersemester 2010/2011 — 27.10.2010

Aufgabe 4 **(schriftlich – 4 Punkte)**

Für $a > 0$ sei die lineare skalare Erhaltungsgleichung

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0$$

gegeben. Zu $h > 0$ und $\tau > 0$ soll die Lösung auf dem Gitter $x_j = j\,h$, $j \in \mathbb{Z}$ und $t_n = n\tau$, $n \in \mathbb{N}$, mithilfe des Upwind-Schemas

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \tfrac{a\,\tau}{h}(U_j^n - U_{j-1}^n)$$

approximiert werden. Zudem existiere eine hinreichend glatte Funktion $v(x,t)$, die die Differenzengleichungen an den Gitterpunkten exakt erfüllt, d.h. es gilt

$$(\star) \quad v(x,t+\tau) = v(x,t) - \tfrac{a\,\tau}{h}\big(v(x,t) - v(x-h,t)\big)$$

für alle Gitterpunkte. Betrachten Sie im Folgenden ein festes Verhältnis von τ und h, d.h. $h = c\,\tau$ mit einer Konstanten $c > 0$.

(a) Zeigen Sie durch Taylor-Entwicklung von v um (x,t) mithilfe von $(\star)$, dass v die Diffusions-Advektions-Gleichung

$$\partial_t v + a\partial_x v = \tfrac{1}{2} a\,h\big(1 - \tfrac{a\,\tau}{h}\big)\partial_x^2 v$$

bis auf Terme der Größenordnung $O(\tau^2) = O(h^2)$ erfüllt.

(b) Welche Bedeutung hat der Term $\partial_x^2 v$ dabei?

(c) Diskutieren Sie den Fall $c = a$ hinsichtlich der Stabilität des Verfahrens.

Aufgabe 5 (mündlich)

Betrachten Sie das Lax-Wendroff-Verfahren

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \tfrac{a\,\tau}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{a\,\tau}{h}\big)^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)\,.$$

Analog zu Aufgabe 4 erfülle die Funktion $v(x,t)$ die Differenzengleichung exakt. Zeigen Sie, dass v dann die Differentialgleichung

$$\partial_t v + a\partial_x v + \tfrac{1}{6} a\,h^2\big(1 - \big(\tfrac{a\,\tau}{h}\big)^2\big)\partial_x^3 v = 0$$

bis auf Terme der Größenordnung $O(\tau^3)$ erfüllt, falls wieder $h = c\,\tau$ mit $c > 0$. Versuchen Sie, den Term $\partial_x^3 v$ zu interpretieren.

Implementieren Sie das Verfahren zudem im Rahmen von Aufgabe 3 und überprüfen Sie die Konvergenzordnung.

Aufgabe 6 **(schriftlich – 2 Punkte)**

Betrachten Sie die Burgersgleichung (d.h. $J(u) = \frac{1}{2}u^2$)

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \partial_t u + \partial_x J(u) = 0\,,$$

für $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$ mit $T = \frac{1}{2\pi}$ und dem Anfangswert $u_0(x) = \sin(2\pi x)$. Zudem seien periodische Randbedingungen vorgegeben, d.h. $u(0,t) = u(1,t)$ für alle $t \in [0,T]$. Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 1, dass zum Anfangswert u_0 genau bei T ein Schock entsteht. Zeichnen Sie zudem qualitativ die Charakteristiken in der $(x-t)$-Ebene für diesen Anfangswert.

Aufgabe 7 (mündlich)

Betrachten Sie nochmals die Problemstellung aus Aufgabe 6. Eine einfache, aber i.Allg. instabile Approximation ist das Differenzenverfahren

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\tau}{h}\big(J(U_{j+1}^n) - J(U_j^n)\big)\,.$$

Implementieren Sie dieses Verfahren für die Burgersgleichung und betrachten Sie das Verhalten der numerischen Lösung in der Nähe des Zeitpunkts T. Bildchen ...

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 8.11.2010, 15.45 Uhr** in den Einwurfkasten "Numerische Mathematik IV" (im 1. Stock von Gebäudeteil C des Allianz-Gebäudes) einzuwerfen oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:

Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.