Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Martin Sauter

Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 3

Wintersemester 2010/2011 — 8.11.2010

Aufgabe 8 **(schriftlich – 4 Punkte)**

Sei $J \in C^2(\mathbb{R})$ strikt konvex, d.h. $a(u) = J'(u)$ ist streng monoton steigend und es gilt $J''(u) > 0$ für alle $u \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Riemann-Problem

$$\partial_t u + \partial_x J(u) = 0\,, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)\,, \qquad u(x,0) = \begin{cases} u_- & , x < 0\,, \\ u_+ & , x > 0\,, \end{cases}$$

mit $u_-, u_+ \in \mathbb{R}$. Die Lösung $u(x,t)$ lässt sich nach Satz (1.12) der Vorlesung explizit angeben. Zeigen Sie, dass die Funktion $t \mapsto u(0,t)$ für $t > 0$ konstant ist, d.h. es gibt ein $u^* \in \mathbb{R}$, sodass $u(0,t) = u^*$ für alle $t > 0$, und dass zudem gilt:

$$J(u^*) = \begin{cases} \max\limits_{u_+ \le u \le u_-} J(u) & , u_- \ge u_+\,, \quad \text{(Schock)}\,, \\ \min\limits_{u_- \le u \le u_+} J(u) & , u_- \le u_+\,, \quad \text{(Rarefaction – Verdünnung)}\,. \end{cases}$$

Aufgabe 9 (mündlich)

Der numerische Fluss im Godunov-Verfahren für strikt konvexes J gegeben als $g(u_-, u_+) = J(u^*)$, wobei $J(u^*)$ wie in Aufgabe 8 definiert ist. Das Verfahren selbst ist dann gegeben als

$$u_j^{n+1} = u_j - \tfrac{\tau}{h}\big(g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n\big)\,,$$

wobei $g_{j+1/2}^n = g(u_j^n, u_{j+1}^n)$. Betrachten Sie die Burgersgleichung (d.h. $J(u) = \frac{1}{2}u^2$) und geben Sie das Verfahren in diesem Fall explizit an. Implementieren Sie es anschließend für periodische Randbedingungen.

Aufgabe 10 (Entropie-Bedingung) **(schriftlich – 4 Punkte)**

Betrachten Sie die skalare Erhaltungsgleichung $\partial_t u + \partial_x J(u) = 0$. Ein Paar von Funktionen $S, \Phi \in C^1(\mathbb{R})$ heißt Entropiesystem für die Erhaltungsgleichung, falls S strikt konvex ist und $\Phi' = S'J'$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass für eine glatte Lösung u stets $\partial_t S(u) + \partial_x \Phi(u) = 0$ gilt.

(b) Sei u eine schwache Lösung und u sei unstetig entlang der Kurve $\Gamma = \{(\gamma(t), t) : t \in (t_1, t_2)\}$. Mit u_- bzw. u_+ sei die Lösung links bzw. rechts von Γ bezeichnet und $s = \gamma'$ sei die Schockgeschwindigkeit. Im schwachen Sinne gelte zudem

$$\partial_t S(u) + \partial_x \Phi(u) \le 0\,.$$

Zeigen Sie, dass entlang der Kurve Γ dann folgende Bedingung gilt:

$$(\star) \qquad s\,\big(S(u_+) - S(u_-)\big) \ge \Phi(u_+) - \Phi(u_-)\,.$$

Gehen Sie dabei ähnlich wie im Beweis der Rankine-Hugoniot-Bed. (1.10) vor.

(c) Für die Burgersgleichung (d.h. $J(u) = \frac{1}{2}u^2$) ist $S(u) = u^2$ und $\Phi(u) = \frac{2}{3}u^3$ ein Entropiesystem. Die Lösung u habe eine Sprungunstetigkeit von u_- nach u_+ mit Schockgeschwindigkeit $s = \frac{u_- + u_+}{2}$ und die Entropie-Bedingung (1.11) der Vorlesung gelte, d.h. $J'(u_-) > s > J'(u_+)$. Zeigen Sie, dass dann auch $(\star)$ gilt.

Aufgabe 11 (mündlich)

Für periodische Randbedingungen sei auf dem Gitter $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J < x_{J+1} = L$ die diskrete Totalvariation $|u|_{\Delta,BV} = \sum_{j=1}^{J+1} |u_j - u_{j-1}|$ gegeben. Schreiben Sie eine Funktion, die diese berechnet, und testen Sie anhand der linearen Gleichung, d.h. $J(u) = au$ mit $a > 0$, und unterschiedlicher Startwerte, welche der folgenden Methoden TVD-Verfahren (total variation diminishing) sind:

(a) Lax-Friedrich: $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{2h}\big(J(u_{j+1}^n) - J(u_{j-1}^n)\big) + \frac{1}{2}\big(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\big)\,,$

(b) Lax-Wendroff: $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\,\tau}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\big(\frac{a\,\tau}{h}\big)^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)\,,$

(c) Godunov-Verfahren: Siehe Aufgabe 9.

Testen Sie das Lax-Friedrich und das Godunov-Verfahren auch mit der Burgersgleichung.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 15.11.2010, 15.45 Uhr** beim Übungsleiter oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.