Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 4

Wintersemester 2010/2011 — 15.11.2010

Aufgabe 12 (Reconstruct-Evolve-Average) **(schriftlich – 4 Punkte)**
Betrachten Sie auf dem Gitter $\Delta = \{x_j = j\,h, j \in \mathbb{Z}\}$ die skalare Erhaltungsgleichung $\partial_t u + \partial_x J(u) = 0$. Zu Δ ist das duale Gitter durch $\Delta' = \{x_{j+1/2} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}), j \in \mathbb{Z}\}$ gegeben und es sei $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$. Sei u_j^n eine Näherung an Gitterpunkt x_j zum Zeitpunkt t_n. Ein Zeitschritt des REA-Algorithmus basiert auf folgender Idee:

(a) Reconstruct: Bestimme aus u_j^n, $j \in \mathbb{Z}$, eine stückweise polynomiale, aber nicht-notwendigerweise stetige Funktion $v_h(x, t_n)$ auf dem dualen Gitter Δ', d.h. $v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_p$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ und ein $p \geq 0$.

(b) Evolve: Wähle $\tau > 0$, sodass die CFL-Bedingung $\sup_{j\in\mathbb{Z}} |J'(u_j^n)| \frac{\tau}{h} \leq 1$ erfüllt ist und löse die Erhaltungsgleichung auf dem Zeitinterval $[t_n, t_{n+1} := t_n + \tau]$ exakt (oder näherungsweise) mit Anfangswert $v_h(x, t_n)$ um somit $v_h(x, t_{n+1})$ zu erhalten.

(c) Average: Setze $u_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{I_j} v_h(x, t_{n+1})\, dx$.

Wir betrachten den Rekonstruktionsteil (a). Dazu sei u_j, $j \in \mathbb{Z}$, und auf Δ' seien die stückweisen linearen Funktionen mit V_h bezeichnet. Die Minmod-Interpolierende $v_h \in V_h$ ist dann über die Interpolationsbedingungen $v_h(x_j) = u_j$, sowie $v_h'(x_j) = h^{-1}\operatorname{minmod}(u_{j+1} - u_j, u_j - u_{j-1})$ mit

$$\operatorname{minmod}(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi & , \xi\eta > 0, |\xi| \leq |\eta|\,, \\ \eta & , \xi\eta > 0, |\xi| > |\eta|\,, \\ 0 & , \text{sonst}\,, \end{cases}$$

bestimmt. Zeigen Sie für $u \in C^2(\mathbb{R})$ (mit $u_j = u(x_j)$):

$$\sup_{x\in I_j} |u(x) - v_h(x)| \leq C\,h^2 \sup_{x\in[x_{j-1},x_{j+1}]} |u''(x)|\,.$$

Aufgabe 13 (mündlich)
Sei $J : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ hinreichend glatt und $A(u) \in \mathbb{R}^{m,m}$ bezeichne die Jacobi-Matrix von J für $u \in \mathbb{R}^m$. Das System von Erhaltungsgleichungen

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = \partial_t u + A(u)\partial_x u = 0$$

für $u(x,t) \in \mathbb{R}^m$ heißt hyperbolisch, falls $A(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^m$ reell diagonalisierbar ist. Zeigen Sie im Fall $F(u) = Au$ mit reell diagonalisierbarem $A \in \mathbb{R}^{m,m}$, dass sich das System dann durch m skalare Transportgleichungen beschreiben lässt. Überlegen Sie sich zudem, wie die Lösungen des zugehörigen Riemann-Problems aussehen.

Aufgabe 14 **(schriftlich – 4 Punkte)**
Auf $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ beschreibt das System von Erhaltungsgleichungen

$$\partial_t\rho + \rho_0 \operatorname{div} v = 0\,, \qquad \partial_t v + (c_0^2/\rho_0)\nabla\rho = 0\,,$$

die Schallausbreitung für die Dichte $\rho \equiv \rho(x,t) \in \mathbb{R}$ und die Geschwindigkeit $v \equiv v(x,t) \in \mathbb{R}^d$. ρ_0 ist eine Referenzdichte und c_0 die Schallgeschwindigkeit.

(a) Leiten Sie aus obigem System die Wellengleichung $\partial_t^2\rho = c_0^2\Delta\rho$ her.

(b) Betrachten Sie den skalaren Fall $d = 1$. Bringen Sie mit dem Ansatz $u = (u^+, u^-)^T \in \mathbb{R}^2$, $u^\pm = \frac{1}{2}(\frac{c_0}{\rho_0}\rho \pm v)$, das System in folgende Form:

$$(\star) \qquad \partial_t u + A\partial_x u = 0\,, \qquad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & -c_0 \end{bmatrix}$$

(c) Lösen Sie $(\star)$ und leiten Sie mit den Anfangsdaten $\rho(x,0) = r(x)$ und $\partial_t\rho(x,0) = s(x)$ die Lösungsformel

$$\rho(x,t) = \frac{1}{2}\big(r(x - c_0 t) + r(x + c_0 t)\big) + \frac{1}{2c_0}\int_{x-c_0t}^{x+c_0t} s(y)\,dy\,.$$

von d'Alambert für die eindimensionale Wellengleichung her.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 22.11.2010, 15.45 Uhr** beim Übungsleiter oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.