Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Martin Sauter

Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 5

Wintersemester 2010/2011 — 22.11.2010

Aufgabe 15 (schriftlich – 3 Punkte)
Betrachten Sie die Determinanten-Funktion $\det : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie:

(a) Es gilt $\operatorname{cof}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^T = \det(\boldsymbol{F})$ für alle $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Berechnen Sie auch die Ableitung von $\det$.

(b) Sei $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = \mathrm{id} + \boldsymbol{u}$ eine Deformation mit Deformationsgradient $\boldsymbol{F} = D\boldsymbol{\varphi}$ und $J = \det(\boldsymbol{F})$. Dann gilt

$$J = 1 + \operatorname{div} \boldsymbol{u} + o(|D\boldsymbol{u}|) \qquad \text{für} \quad |D\boldsymbol{u}| \to 0\,.$$

(c) Sei $t \mapsto \boldsymbol{S}(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ hinreichend glatt. Berechnen Sie die Ableitung $\partial_t \det(\boldsymbol{S}(t))$.

(d) Berechnen Sie die Ableitung von $\boldsymbol{E} \mapsto \log(\det(\boldsymbol{E}))$, falls $\boldsymbol{E}$ symmetrisch und regulär ist.

Aufgabe 16 (mündlich)

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{cof}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}) = \operatorname{cof}(\boldsymbol{F}) \operatorname{cof}(\boldsymbol{G})$ gilt.

(b) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{3,3}$. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\operatorname{cof}(\boldsymbol{F})$ dann $\lambda_1\lambda_2, \lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_3$ sind.

Aufgabe 17 (schriftlich – 3 Punkte)
Sei $\mathfrak{so}(n) = \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n} : \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T\}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie den linearsierten Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(D\boldsymbol{u} + D\boldsymbol{u}^T)$ für die Versetzung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi} - \mathrm{id}$ einer Deformation $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und zeigen Sie:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{R}x\,,\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{R} \in \mathfrak{so}(3)\,.$$

Aufgabe 18 (schriftlich – 3 Punkte)
Sei $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Deformation mit Deformationsgradient $\boldsymbol{F} = D\boldsymbol{\varphi}$ und dem (rechten) Cauchy-Green-Verzerrungstensor $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$. Zu $\boldsymbol{C}$ sei $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{3,3}$ so gegeben, dass $\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{C}$ gilt. Mit $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \mathrm{id})$ sei der Green-St.Venant-Verzerrungstensor bezeichnet und zusätzlich sei noch $\boldsymbol{E}_e = \boldsymbol{U} - \mathrm{id}$ und $\boldsymbol{E}_l = \log(\boldsymbol{U})$ definiert. Zeigen Sie:

$$\boldsymbol{E}_e = \boldsymbol{E} + o(|\boldsymbol{E}|) \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{E}_l = \boldsymbol{E} + o(|\boldsymbol{E}|) \qquad \text{für} \quad \boldsymbol{E} \to 0\,.$$

Aufgabe 19 (Homogene Scher-Deformation) (mündlich)
Betrachten Sie auf $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ die Deformation $\boldsymbol{\varphi}(x) = (x_1 + \kappa\, x_2, x_2, x_3)$ mit $\kappa \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie für obige Deformation $\boldsymbol{F} = D\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$.

(b) Berechnen Sie die drei Invarianten von $\boldsymbol{B}$, d.h. $\iota_1(\boldsymbol{B}) = \operatorname{spur}(\boldsymbol{B})$, $\iota_2(\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}(\operatorname{spur}(\boldsymbol{B})^2 - \operatorname{spur}(\boldsymbol{B}^2))$ und $\iota_3(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{B})$.

(c) Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ habe die Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \beta_0 \,\mathrm{id} + \beta_1 \boldsymbol{B} + \beta_2 \boldsymbol{B}^2\,.$$

Dabei sind $\beta_i \equiv \beta_i(\iota_1(\boldsymbol{B}), \iota_2(\boldsymbol{B}), \iota_3(\boldsymbol{B}))$ skalare Funktionen, die nur von den Invarianten von $\boldsymbol{B}$ abhängen. Für $\kappa = 0$ gelte zudem $\boldsymbol{\sigma} = 0$. Zeigen Sie, dass dann $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0$, $\boldsymbol{\sigma}_{ii} = O(\kappa^2)$ und $\boldsymbol{\sigma}_{11} - \boldsymbol{\sigma}_{22} = \kappa\boldsymbol{\sigma}_{12}$ gilt.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 29.11.2010, 15.45 Uhr** beim Übungsleiter oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.