Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Martin Sauter

Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 6

Wintersemester 2010/2011 — 29.11.2010

Aufgabe 20 (Isotrope Funktionen) (schriftlich – 5 Punkte)
Ein Funktion $f : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ bzw. $\boldsymbol{G} : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}^{n,n}$ heißt isotrop, falls $f(\boldsymbol{QAQ}^T) = f(\boldsymbol{A})$ bzw. $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{QAQ}^T) = \boldsymbol{QG}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}^T$ für alle $\boldsymbol{Q} \in SO(n)$ und $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt. Sei $n = 3$ und $\iota_{\boldsymbol{A}} = \big(\iota_1(\boldsymbol{A}), \iota_2(\boldsymbol{A}), \iota_3(\boldsymbol{A})\big)$ bezeichne die Invarianten von $\boldsymbol{A}$. Zudem seien f und $\boldsymbol{G}$ stets auf $\mathrm{Sym}(3) \subset \mathbb{R}^{3,3}$ eingeschränkt. Zeigen Sie:

(a) Die Invarianten sind isotrope Funktionen.

(b) $f : \mathrm{Sym}(3) \to \mathbb{R}$ ist genau dann isotrop, falls es eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(\boldsymbol{A}) = \tilde{f}(\iota_{\boldsymbol{A}})$ gilt.

(c) Sei $\boldsymbol{G} : \mathrm{Sym}(3) \to \mathrm{Sym}(3)$ isotrop. Dann ist jeder Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ auch Eigenvektor von $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A})$.

(d) $\boldsymbol{A}$ habe die Spektralzerlegung $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^T$ und alle Eigenwerte seien verschieden. Dann ist die Menge $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2\}$ linear unabhängig und es gilt $\mathrm{span}\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^T, \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2^T, \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3^T\}$.

(e) $\boldsymbol{A}$ habe genau zwei verschiedene Eigenwerte, d.h. es gilt $\boldsymbol{A} = \omega_1 \boldsymbol{ee}^T + \omega_2(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{ee}^T)$, $|\boldsymbol{e}| = 1$. Dann ist die Menge $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}\}$ linear unabhängig und es gilt $\mathrm{span}\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{ee}^T, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{ee}^T\}$.

Aufgabe 21 (mündlich)
Betrachten Sie nochmals die Situation aus Aufgabe 20 für $n = 3$ und zeigen Sie:

(a) $\boldsymbol{G}$ ist genau dann isotrop, falls $\beta_0, \beta_1, \beta_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = \beta_0(\iota_{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{I} + \beta_1(\iota_{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{A} + \beta_2(\iota_{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{A}^2 .$$

(b) $\boldsymbol{G}$ ist genau dann isotrop, falls $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = \gamma_0(\iota_{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{I} + \gamma_1(\iota_{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{A} + \gamma_2(\iota_{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{A}^{-1} .$$

(c) Sei $\boldsymbol{G}$ linear. Dann ist $\boldsymbol{G}$ genau dann isotrop, falls es $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}) = 2\mu\boldsymbol{A} + \lambda(\mathrm{spur}(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{I}$ gilt.

Aufgabe 22 (schriftlich – 4 Punkte)
Eine Bewegung ist eine Familie $\varphi_t : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ von Deformationen. Unter Berücksichtigung der Deformationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_t : \Omega_t \to \mathbb{R}^3$ erhalten wir die folgende Variante (unter der Annahme einer konstanten Dichte) des "Prinzips der virtuellen Arbeit" (dabei sei $\omega_t \subset \Omega_t$ beliebig, und ein Subskript t bezeichne eine Größe zum Zeitpunkt t):

$$\int_{\omega_t} \boldsymbol{T}_t : D\boldsymbol{w}\, dx^{\varphi_t} = \int_{\omega_t} \big(\boldsymbol{f}_t - \tfrac{\partial}{\partial_t}\boldsymbol{v}_t\big) \cdot \boldsymbol{w}\, dx^{\varphi_t} + \int_{\partial\omega_t} \boldsymbol{T}_t\boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{w}\, da^{\varphi_t} ,$$

für alle $\boldsymbol{w} : \Omega_t \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{w}|_{\Gamma_{0,t}} = 0$. Der erste Satz der Thermomechanik besagt

$$\int_{\omega_t} \tfrac{\partial}{\partial_t}\big(e_t + \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{v}_t|^2\big)\, dx^{\varphi_t} = \int_{\omega_t} (\boldsymbol{f}_t \cdot \boldsymbol{v}_t + s_t)\, dx^{\varphi_t} + \int_{\partial\omega_t} (\boldsymbol{T}_t\boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{q}_t \cdot \boldsymbol{n}_t)\, da^{\varphi_t}$$

mit der inneren Energie e_t, der Wärmequelle s_t und dem Wärmefluss $\boldsymbol{q}_t$. Der zweite Satz der Thermodynamik besagt (Clausius-Duhem-Ungleichung)

$$\int_{\omega_t} \tfrac{\partial}{\partial_t}\eta_t\, dx^{\varphi_t} \geq \int_{\omega_t} \tfrac{1}{\vartheta_t} s_t\, dx^{\varphi_t} + \int_{\partial\omega_t} \tfrac{1}{\vartheta_t}\boldsymbol{q}_t \cdot n_t\, da^{\varphi_t}$$

mit der absoluten Temperatur ϑ_t und der Entropie η_t. Zeigen Sie für die freie Energie $\mathcal{W}_t = e_t - \eta_t\vartheta_t$ die Dissipationsungleichung

$$\int_{\omega_t} \big(\tfrac{\partial}{\partial_t}\mathcal{W} - \eta_t \tfrac{\partial}{\partial_t}\vartheta_t\big)\, dx^{\varphi_t} \leq \int_{\omega_t} \big(\boldsymbol{T}_t : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_t) + \tfrac{1}{\vartheta_t}\boldsymbol{q}_t \cdot \nabla\vartheta_t\big)\, dx^{\varphi_t} .$$

Betrachten Sie auch den isothermen Fall, d.h. $\vartheta_t =$ konstant.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 06.12.2010, 15.45 Uhr** beim Übungsleiter oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.