Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Martin Sauter

Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 7

Wintersemester 2010/2011 — 06.11.2010

Aufgabe 23 (Newton-Verfahren) (mündlich)
Betrachten Sie ein elastisches Materialgesetz mit Spannungsantwort $\hat{\boldsymbol{T}}(x, \boldsymbol{F})$, d.h. $\boldsymbol{T}(x) = \hat{\boldsymbol{T}}(x, \boldsymbol{F})$ und sei $\boldsymbol{V}(\varphi_D) = \{\varphi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3 : \varphi = \varphi_D \text{ auf } \Gamma_0\}$. Eine schwache Lösung φ des Elastizitätsproblems erfüllt dann

$$\int_\Omega \boldsymbol{T} : D\boldsymbol{v}\, dx = \int_\Omega \hat{\boldsymbol{f}}(\varphi) \cdot \boldsymbol{v}\, dx + \int_{\Gamma_1} \hat{\boldsymbol{g}}(\varphi, D\varphi) \cdot \boldsymbol{v}\, da \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}(0)\,.$$

Es gilt wieder $\varphi(x) = x + \boldsymbol{u}(x)$. Formulieren Sie analog zur Vorlesung das Newton-Verfahren für die Versetzung $\boldsymbol{u}$ (und nicht für φ), unter der Annahme "toter Lasten".

Aufgabe 24 (schriftlich – 3 Punkte)
Betrachten Sie ein hyperelastisches Materialmodell. Der volumetrische Anteil der freien Energie sei dabei durch

$$W_{\mathsf{vol}}(\boldsymbol{F}) \equiv W_{\mathsf{vol}}(x, \boldsymbol{F}) = \frac{\lambda}{4}\Big(\big(\det \boldsymbol{F} - 1\big)^2 + \big(\tfrac{1}{\det \boldsymbol{F}} - 1\big)^2\Big)$$

gegeben. Berechnen Sie die für das Newton-Verfahren nötigen Ableitungen $DW_{\mathsf{vol}}(\boldsymbol{F})[\boldsymbol{G}]$ und $D^2W_{\mathsf{vol}}(\boldsymbol{F})[\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}]$ explizit.

Aufgabe 25 (Lineare Elastizität) (schriftlich – 3 Punkte)
Die Lösung $\boldsymbol{u} \in H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^3)$ isotroper, infinitesimaler Elastizität erfüllt

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \int_\Omega 2\mu\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) + \lambda(\operatorname{div} \boldsymbol{u})(\operatorname{div} \boldsymbol{v})\, dx = \ell(\boldsymbol{v})\,, \quad \forall \boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

mit den Lamé-Konstanten $\mu, \lambda > 0$ und einem Funktional $\ell \in \big(H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^3)\big)'$. Nach der zweiten Korn'schen Ungleichung gilt $\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\, dx \geq c_{\mathsf{K}} \|\boldsymbol{u}\|^2_{H^1}$ mit $c_{\mathsf{K}} > 0$, woraus folgt, dass $a(\cdot, \cdot)$ H^1-elliptisch ist. Für ein fast inkompressibles Material gilt $\lambda \gg \mu$. Welchen Einfluss hat dies auf die Elliptizitäts- und Stetigkeitskonstante der Bilinearform, und wie wirkt sich dies auf die Fehlerabschätzung in Cea's Lemma (Satz 3.26 Numerik III) aus?

Aufgabe 26 (Nichtkonvexe Minimierung) (schriftlich – 3 Punkte)
Hyperelastizität lässt sich als Minimierungsproblem $\mathcal{E}(\varphi) = \min!$ der Gesamtenergie formulieren. Für die Versetzung lässt sich dies als $I(\boldsymbol{u}) = \varphi(\mathrm{id} + \boldsymbol{u}) = \min!$ formulieren. Betrachten Sie das folgende eindimensionale Modellproblem mit

$$I(u) = \int_0^1 u(x)^2 + \big(u'(x)^2 - 1\big)^2\, dx\,, \qquad u(0) = u(1) = 0\,,$$

und zeigen Sie:

(a) Die Folge (stetiger und stückweise linearer Funktionen)

$$u_n(x) = \begin{cases} x - \frac{i}{n} & , \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i}{n} + \frac{1}{2n}\,, \\ \frac{i+1}{n} - x & , \frac{i}{n} + \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}\,, \end{cases}$$

mit $i = 0, \ldots, n-1$ ist eine Minimalfolge für obiges Problem.

(b) Die Folge u_n konvergiert gleichmäßig gegen $\hat{u}(x) = 0$.

(c) Die Funktion $\hat{u}(x) = 0$ ist keine Lösung des Minimierungsproblems $I(u) = \min!$

Aufgabe 27 (mündlich)
Betrachten Sie analog zu Aufgabe 25 die Minimierungsaufgabe $I(u) = \min!$ mit

$$I(u) = \int_0^1 (u(x)^3 - x)^2 |u'(x)|^6\, dx\,, \qquad u(0) = 0, u(1) = 1\,,$$

mit der Lösung $u^*(x) = x^{1/3}$. Bestimmen Sie das maximale $1 \leq p \leq \infty$, sodass $u^* \in W^{1,p}(0,1) = \{v \in L^p(0,1) : \partial_x v \in L^p(0,1)\}$ liegt.

Zudem sei $h = \frac{1}{J+1}$, $x_j = jh$ für $j = 0, \ldots, N+1$ und $K_j = [x_{j-1}, x_j]$. Der lineare Finite Elemente Raum ist gegeben durch $V_h = \{u_h \in C^{0,1}[0,1], u_h|_{K_j} \in \mathbb{P}_1, u_h(0) = 0, u_h(1) = 1\}$ und $P_h : C[0,1] \to V_h$ bezeichne die Knoteninterpolation.

Betrachten Sie den Beitrag des ersten Elements K_1 zur Energie und zeigen Sie, dass $\lim_{h \to 0} I(P_h u^*) = \infty$ gilt.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 13.12.2010, 15.45 Uhr** beim Übungsleiter oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.