Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 8

Wintersemester 2010/2011 — 13.12.2010

Aufgabe 28 (schriftlich – 4 Punkte)

Sei $\mathcal{E}_h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ differenzierbar (aber nicht notwendigerweise konvex) und $K_h \subset \mathbb{R}^N$ sei konvex. Betrachten Sie die Minimierungsaufgabe

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{E}_h(u_h) \qquad \text{unter} \quad u_h \in K_h\,,$$

und $u_h^* \in K_h$ sei ein lokales Minimum. Zeigen Sie, dass dann $D\mathcal{E}_h(u_h^*)[d_h] \geq 0$ für alle $d_h \in T_{K_h}(u_h^*) = \{v_h \in \mathbb{R}^N : \exists t > 0 : u_h^* + tv_h \in K_h\}$ gilt. Interpretieren Sie dieses Resultat geometrisch. Wenden Sie das Ergebnis auf das Funktional $\mathcal{E}_h(u_h) = \frac{1}{2}a(u_h, u_h) - \ell(u_h)$ mit einer Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und einer Linearform ℓ an, und geben Sie somit einen alternativen Beweis von Lemma (3.2) der Vorlesung.

Aufgabe 29 (mündlich)

Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ konvex, und zu $u \in \mathbb{R}^N$ bezeichne $P_a(u) \in K$ die Projektion auf K bzgl. eines Skalarprodukts $a(\cdot,\cdot)$. Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 28, dass $P_a(u)$ durch folgende Variationsungleichung charakterisiert ist:

$$a\big(u - P_a(u), v - P_a(u)\big) \leq 0 \qquad \forall v \in K\,.$$

Berechnen Sie außerdem die Euklid'schen Projektionen auf die Mengen $K_1 = \{u \in \mathbb{R}^N : u \geq \psi\}$, $K_2 = \{u \in \mathbb{R}^N : u \leq \phi\}$ (für gegebene $\psi, \phi \in \mathbb{R}^N$) und $K_3 = \{u \in \mathbb{R}^N : |u_i| \leq K_0, i = 1, \ldots, N\}$ (für $0 < K_0 \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 30 (schriftlich – 4 Punkte)

Zu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sei $V = H_0^1(\Omega)$ und $V_h \subset V$ ein entsprechender Finite-Element-Raum. Zudem seien konvexe Mengen $K \subset V$ und $K_h \subset V_h$ gegeben. Betrachten Sie zu einer elliptischen und stetigen Bilinearform $a : V \times V \to \mathbb{R}$ und $\ell \in V'$ die Variationsaufgaben

$$\begin{aligned} a(u, v - u) &\geq \ell(v - u)\,, && \forall v \in K\,,\\ a(u_h, v_h - u_h) &\geq \ell(v_h - u_h)\,, && \forall v_h \in K_h\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es eine von h unabhängige Konstante $C > 0$ gibt, sodass

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_{H^1} \leq C\Big(&\inf_{v_h \in K_h} \big(\|u - v_h\|_{H^1} + |a(u, v_h - u) - \ell(v_h - u)|^{1/2}\big)\\ &+ \inf_{v \in K} |a(u, v - u_h) - \ell(v - u_h)|^{1/2}\Big)\,. \end{aligned}$$

Wie ändert sich die Abschätzung falls $K_h \subset K$ gilt?

Aufgabe 31 (mündlich)

Sei $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ und $K = \{u \in V : u \leq \phi\}$ mit festem $\phi \in V$. Mit $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$ und $\ell(v) = \int_\Omega fv\,dx$ sowie der Indikatorfunktion $\chi_K(u) = \begin{cases} 0 & , u \in K\,,\\ \infty & , u \notin K\,, \end{cases}$ lässt sich das Hindernisproblem schreiben als:

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{E}(u) = \tfrac{1}{2}a(u,u) - \ell(u) + \chi_K(u)\,, \qquad u \in V\,.$$

Betrachten Sie die Augmented-Lagrange-Regularisierung $\chi_K^\alpha : V \times H \to \mathbb{R}$,

$$\chi_K^\alpha(u, \lambda) = \inf_{w \in H} \Big(\chi_K(u - w) + (\lambda, w)_H + \tfrac{\alpha}{2}\|w\|_H^2\Big)\,,$$

der Indikatorfunktion und zeigen Sie:

(a) Es ist $\chi_K^\alpha(u, \lambda) = \frac{1}{2\alpha}\Big(\|\max\{0, \lambda + \alpha(u - \phi)\}\|_H^2 - \|\lambda\|_H^2\Big)$.

(b) Berechnen Sie die Ableitungen $D_u\chi_K^\alpha(u, \lambda)$ und $D_\lambda\chi_K^\alpha(u, \lambda)$.

(c) Berechnen Sie einen Sattelpunkt der Augmented-Lagrange-Funktion

$$L^\alpha(u, \lambda) = \tfrac{1}{2}a(u,u) - \ell(u) + \chi_K^\alpha(u, \lambda)\,.$$

In welchem Zusammenhang steht dies mit der Aktiven-Mengen-Methode aus der Vorlesung?

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 20.12.2010, 15.45 Uhr** beim Übungsleiter oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.