Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Martin Sauter

Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 9

Wintersemester 2010/2011 — 20.12.2010

Aufgabe 32 (schriftlich – 4 Punkte)
Betrachten Sie zur uniformen Triangulierung $x_j = a + jh$, $h = \frac{b-a}{N+1}$ von $[a,b] \subset \mathbb{R}$ den linearen Finite-Element-Raum $V_h = \{v_h \in C[a,b] : v_h|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathbb{P}_1\}$. Eine Basisfunktion zum Knoten z sei mit ϕ_z bezeichnet (Hutfunktion). Eine Biorthogonalbasis $\operatorname{span}\{\psi_z\}$ ist durch die Bedingung

$$\int_a^b \phi_z \psi_y = \begin{cases} \omega_z & , z = y\,, \\ 0 & , \text{sonst}, \end{cases}$$

gegeben, wobei $\omega_z = \int_a^b \phi_z \, dx$ ist. Berechnen Sie für einen Knoten z die biorthogonale Basisfunktion ψ_z unter der Voraussetzung, dass ψ_z stückweise linear und global unstetig ist. Erstellen Sie eine kleine Zeichnung zur Illustration.

Aufgabe 33 (mündlich)
Sowohl das Hindernisproblem wie auch das (infinitesimale) Kontaktproblem lassen sich nach der Diskretisierung als Minimierungsproblem in folgender Form schreiben:

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} u^T A u - f^T u \qquad \text{unter} \quad u \in \mathbb{R}^N,\ Bu - d \le 0\,.$$

mit $f \in \mathbb{R}^N$, $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ symmetrisch positiv definit, $B \in \mathbb{R}^{M,N}$ und $d \in \mathbb{R}^M$ mit passendem $M \in \mathbb{N}$. Mithilfe des Lagrange-Funktionals $L(u,\lambda) = \mathcal{E}(u) + \lambda^T(Bu - d)$ lässt sich zu diesem Minimierungsproblem ein duales Problem formulieren:

$$\text{Maximiere} \quad \mathcal{F}(\lambda) = \inf_{u \in \mathbb{R}^N} L(u,\lambda) \qquad \text{unter} \quad \lambda \ge 0\,.$$

Berechnen Sie die Funktion $\mathcal{F}(\lambda)$. Unter welchen Bedingungen an B hat dieses Problem eine eindeutige Lösung? Überlegen Sie sich zudem, wie eine entsprechende Formulierung im kontinuierlichen Fall aussehen würde.

Aufgabe 34 (mündlich)
Sei H ein Hilbertraum und $K \subset H$ konvex. Die (Orthogonal-) Projektion $P : H \to K$ auf K bzgl. einem Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot)$ mit induzierter Norm $\|u\|_a = \sqrt{a(u,u)}$, ist durch $a(u - P(u), v - P(u)) \le 0$ für alle $v \in K$ charakterisierung (siehe auch Aufgabe 29). Zeigen Sie, dass dann für beliebige $u, v \in H$ die Ungleichungen

$$\|P(u) - P(v)\|_a^2 \le a(u - v, P(u) - P(v))$$

bzw. $\|P(u) - P(v)\|_a \le \|u - v\|_a$ gelten.

Aufgabe 35 (Penalty-Verfahren) (schriftlich – 4 Punkte)
Betrachten Sie nochmals die Situation aus Aufgabe 33. Die Nebenbedingung $Bu - d \le 0$ soll nun über eine Penalty-Bedingung erzwungen werden. Dazu sei $R(u) = \frac{1}{2}\big|\max\{0, Bu - d\}\big|^2$ die Penalty-Funktion (dabei wird die $\max$-Funktion komponentenweise in $\mathbb{R}^M$ angewendet). Betrachten Sie für $\alpha > 0$ die Minimierungsprobleme

$$(\star) \quad \text{Minimiere} \quad \mathcal{E}_\alpha(u) = \mathcal{E}(u) + \alpha R(u)\,, \qquad u \in \mathbb{R}^N\,.$$

(a) Bestimmen Sie die notwendige Bedingung für ein Minimum von $(\star)$, indem Sie die Ableitung von $\mathcal{E}_\alpha$ bestimmen.

(b) Sei $u_\alpha \in \mathbb{R}^N$ eine Lösung von $(\star)$. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{E}(u_\alpha) \le \mathcal{E}(v)$ für alle $v \in K$ gilt, und es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass $|u_\alpha| \le C$ für alle $\alpha > 0$.

(c) Nutzen Sie (b) und zeigen Sie, dass für $\alpha \to \infty$ eine Teilfolge von $\{u_\alpha\}$ gegen das Minimum von $\mathcal{E}(u)$ konvergiert.

(d) Entwickeln Sie auf Basis der Penalty-Formulierung einen Algorithmus, um eine Lösung des ursprünglichen Problems zu berechnen.

Frohe Weihnachten

und eine schönes neues Jahr

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 10.01.2011, 15.45 Uhr** beim Übungsleiter oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.