Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Martin Sauter

Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 10

Wintersemester 2010/2011 — 10.011.2011

Aufgabe 36 (schriftlich – 4 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ eine konvexe und kompakte Menge und $P_K : \mathbb{R}^N \to K$ sei die Euklid'sche Orthogonalprojektion auf K. Ferner sei das Potential

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 - \tfrac{1}{2}\|P_K(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma}\|^2$$

gegeben. Zeigen Sie, dass Ψ dann lediglich lineares Wachstum für $\|\boldsymbol{\sigma}\| \to \infty$ besitzt, d.h. es gilt

$$\lim_{\|\boldsymbol{\sigma}\|\to\infty} \frac{|\Psi(\boldsymbol{\sigma})|}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} < \infty\,.$$

Aufgabe 37 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie folgende Vereinfachung des Problems der Hencky-Plastizität. Im Folgenden sei $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^2$ und es gelte $\mathbb{C} = \boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{2,2}$. Zudem sei $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = -B^T\boldsymbol{u}$ mit der Matrix $B = -\begin{bmatrix}1 & \delta\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1,2}$, wobei $\delta \in \mathbb{R}$. Somit ergibt sich für die Potentiale $\mathcal{E}(\boldsymbol{u}) = (1+\delta^2)\boldsymbol{u}^2$ und $\mathcal{D}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{\sigma}|^2$. Zu $\ell \in \mathbb{R}$ sei dann

$$\begin{aligned} K &= \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^2 : f(\boldsymbol{\sigma}) := \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \le 0\}\,,\\ S(\ell) &= \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^2 : B\boldsymbol{\sigma} = -\ell\}\,, \end{aligned}$$

sowie $K(\ell) = K \cap S(\ell)$ definiert. Die Aufgabe besteht nun darin $\boldsymbol{\sigma} \in K(\ell)$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}$ und $0 \le \gamma \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, sodass

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \gamma Df(\boldsymbol{\sigma})\,,\\ &B\boldsymbol{\sigma} = -\ell\,,\\ &f(\boldsymbol{\sigma}) \le 0\,, \qquad \gamma \ge 0\,, \qquad \gamma\, f(\boldsymbol{\sigma}) = 0\,. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Projektion $P_K : \mathbb{R}^2 \to K$ explizit.

(b) Für welche Kombinationen von δ und ℓ ist $K(\ell) \neq \emptyset$.

(c) Berechnen Sie das Funktional

$$J(\boldsymbol{u}) = \mathcal{E}(\boldsymbol{u}) - \mathcal{D}\Big(P_K\big(\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\big) - \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\Big)$$

sowie die Ableitung $DJ(\boldsymbol{u})$ explizit.

(d) Diskutieren Sie in Abhängigkeit von δ und ℓ die Lösbarkeit der Gleichung $DJ(\boldsymbol{u}) = 0$. Welcher Zusammenhang besteht mit Aufgabenteil (b) und wie verhält sich $J(\boldsymbol{u})$ für $|\boldsymbol{u}| \to \infty$?

Aufgabe 38 (Viskoplastische Regularisierung) (mündlich)

Sei $K = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{Sym}(3) : |\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}| \le K_0\}$ die zulässige Menge der Hencky-Plastizität und $\mathcal{D}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$. Die Fließregel lässt sich nach Einführung der plastischen Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}_p \in \mathrm{Sym}(3)$ auch als $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$ darstellen und es gilt $\boldsymbol{\varepsilon}_p = \gamma\frac{\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}|}$, wobei $\gamma \ge 0$ und $\boldsymbol{\sigma} \in K$ durch die Komplementaritätsbedingung $\gamma(|\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}| - K_0) = 0$ bestimmt sind. Eine äquivalente Formulierung der Fließregel ist durch $\boldsymbol{\varepsilon}_p \in \partial\chi_K(\boldsymbol{\sigma})$ gegeben, wobei $\partial\chi_K$ das konvexe "Subdifferential" der Indikatorfunktion χ_K ist. Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\eta}) \ge 0 \qquad \text{für alle} \quad \boldsymbol{\eta} \in K\,,$$

falls $\boldsymbol{\sigma} \in K$. Einführen der Moreau-Yosida Approximation (mit $\alpha > 0$)

$$\chi_K^\alpha(\boldsymbol{\sigma}) = \inf_{\boldsymbol{\eta}\in\mathrm{Sym}(3)} \{\chi_K(\boldsymbol{\eta}) + \alpha\mathcal{D}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\sigma})\}$$

führt auf die viskoplastische Regularisierung $\boldsymbol{\varepsilon}_p = D\chi_K^\alpha(\boldsymbol{\sigma})$.

(a) Berechnen Sie χ_K^α sowie die Ableitung $D\chi_K^\alpha$ explizit für alle $\alpha > 0$ und zeigen Sie für festes $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{Sym}(3)$: $\lim_{\alpha\to\infty} \chi_K^\alpha(\boldsymbol{\sigma}) = \chi_K(\boldsymbol{\sigma})$.

(b) Formulieren Sie die Fließregel der viskoplastischen Regularisierung.

(c) Welche Probleme erhält man in den Grenzfällen $\alpha \to 0$ und $\alpha \to \infty$?

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 17.01.2011, 15.45 Uhr** beim Übungsleiter oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.