Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Martin Sauter

Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 11

Wintersemester 2010/2011 — 17.011.2011

Aufgabe 40 (schriftlich – 4 Punkte)
Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ sei regulär und es gelte $A^{-1} \geq 0$ (komponentenweise). A habe eine Aufspaltung $A = M - R$ mit $R \geq 0$ (komponentenweise) und es gelte $M^{-1} \geq 0$ (komponentenweise). Das zugehörige lineare Iterationsverfahren

$$u^{k+1} = u^k + B(f - Au^k)$$

sei dann über den Vorkonditioner $B = M^{-1}$ definiert. Zeigen Sie die Konvergenz des Verfahrens, indem Sie $\rho(I - BA) < 1$ zeigen.

Sie können den Satz von Perron-Frobenius benutzen (siehe auch Numerik I, Blatt 6, Aufgabe 28): Jede Matrix $C \in \mathbb{R}^{N,N}$ mit $C \geq 0$ (komponentenweise) besitzt einen Eigenvektor $x \geq 0$ (komponentenweise) zum Eigenwert $\lambda = \rho(C)$.

Aufgabe 41 (schriftlich – 2 Punkte)
Sei $V \subset H = L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ sei eine V-elliptische, symmetrische und beschränkte Bilinearform sowie $\ell \in V'$. Die schwache Formulierung:

$$\text{Finde } u \in V: \qquad a(u, v) = \ell(v) \qquad v \in V\,,$$

ist dann gerade die Optimalitätsbedingung der Minimierungsaufgabe

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{E}(u) = \tfrac{1}{2}a(u, u) - \ell(u)\,.$$

Formulieren Sie die Grobgitterkorrektur im Zweigitter-Verfahren (nach entsprechender Diskretisierung) als passendes Minimierungsproblem.

Aufgabe 42 (schriftlich – 2 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von Ω in Vierecke. $V_H \subset V_h \subset V = H_0^1$ seien zwei geschachtelte bilineare Finite-Elemente-Räume, wobei V_h durch uniforme Verfeinerung von V_H entstehe. Die Einbettung $E_h : V_H \to V_h$ sei dabei über die bilineare Interpolationsaufgabe definiert. Nach einer geeigneten Nummerierung der Freiheitsgrade lässt sich E_h dann elementweise als Matrix darstellen. Wie sieht diese Matrix aus?

Aufgabe 43 (mündlich)
Betrachten Sie das eindimensionale Modellproblem $-u'' = f$ auf $\Omega = (0, 1)$ mit $f(x) = 1$ und $u(0) = u(1) = 0$. Nach einer finiten Differenzenapproximation mit Schrittweite $h = \frac{1}{N+1}$ führt dies auf das lineare Gleichungssystem $Au = f$ mit $A = h^{-2}\,\mathrm{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{N,N}$ und $f = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$.

Implementieren Sie das Jacobi-Verfahren und das Gauß-Seidel-Verfahren (jeweils mit Dämpfung $\theta \in (0, 1)$) für dieses Gleichungssystem, d.h.

$$u^{k+1} = u^k + \theta D^{-1}(f - Au^k) \qquad \text{(Jacobi)},$$
$$u^{k+1} = u^k + \theta (D + L)^{-1}(f - Au^k) \qquad \text{(Gauß-Seidel)},$$

wobei $A = D + L + R$ die Aufspaltung von A in die Diagonale D sowie die strikte untere bzw. obere Dreiecksmatrix L und R ist.

Überprüfen Sie die Glättungseigenschaften der Verfahren. Wählen Sie dazu einen Startwert u^0, der aus einer niederfrequenten und einer hochfrequenten Sinusschwingung (bzgl. der Gitterweite h) besteht und zeichnen Sie den Fehler $e = u^k - u^*$, wobei $u^* = A^{-1}f$ die exakte Lösung ist. Wie verhält sich der Fehler qualitativ in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationen und dem Dämpfungsparameter?

Aufgabe 44 (mündlich)
Betrachten Sie nochmals die Situation aus Aufgabe 42 für zwei Diskretisierungen mit Gitterweite $H > 0$ und $h = H/2$. Implementieren Sie zur Finiten-Differenzen-Approximation zwei Matlab-Funktionen für die Restriktion und die Prolongation zwischen zwei Gitterfunktionen u_h bzw. u_H. Dabei sei die Prolongation über die lineare Interpolationsaufgabe definiert, und die Restriktion sei kanonisch gegeben durch $u_H(x) = u_h(x)$ falls x Gitterpunkt zum Gitter mit Schrittweite H ist. Visualisieren Sie anschließend die Ergebnisse.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 24.01.2011, 15.45 Uhr** beim Übungsleiter oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.