Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Martin Sauter

Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 12

Wintersemester 2010/2011 — 24.011.2011

Aufgabe 45 (schriftlich – 4 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ sowie V und W zwei Unterräume von H. Die Orthogonalprojektionen auf V bzw. W seien mit P_V bzw. P_W bezeichnet. Zeigen Sie folgende Äquivalenzen:

(a) Es gilt eine verschärfte Cauchy-Schwarz-Ungleichung zwischen V und W, d.h. es gibt ein $\varepsilon < 1$, sodass $\langle v, w \rangle \leq \varepsilon \|v\| \|w\|$ für alle $v \in V$ und $w \in W$ gilt.

(b) Es gilt $\|P_W v\| \leq \varepsilon \|v\|$ für alle $v \in V$.

(c) Es gilt $\|P_V w\| \leq \varepsilon \|w\|$ für alle $w \in W$.

(d) Es gilt $\sqrt{1 - \varepsilon^2} \|v\| \leq \|v + w\|$ für alle $v \in V$ und $w \in W$.

Aufgabe 46 (Alternierendes Verfahren von Schwarz) (schriftlich – 4 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum mit Unterräumen V und W, sodass $H = V \oplus W$ gilt. Die Bilinearform $a : H \times H \to \mathbb{R}$ sei H-elliptisch, symmetrisch und beschränkt und $\|u\| = \sqrt{a(u, u)}$ sei die Energie-Norm. Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$\text{Minimiere} \quad \mathcal{E}(u) := \frac{1}{2} a(u, u) - \ell(u) , \qquad u \in H ,$$

mit $\ell \in H'$. Das alternierende Verfahren von Schwarz ist gegeben durch

S0) Wähle $u^0 \in V$, setze $k := 0$.

S1) Bestimme $\Delta w \in W$ als Minimum $\mathcal{E}(u^{2k} + \Delta w)$ und setze $u^{2k+1} = u^{2k} + \Delta w$.

S2) Bestimme $\Delta v \in V$ als Minimum von $\mathcal{E}(u^{2k+1} + \Delta v)$ und setze $u^{2k+2} = u^{2k+1} + \Delta v$.

S3) Setze $k := k + 1$ und gehe zu S1).

(a) Geben Sie für $H = \mathbb{R}^2$ eine geometrische Interpretation.

(b) Bzgl. des Skalarprodukts $a(\cdot, \cdot)$ und den Unterräumen V und W gelte eine verschärfte Cauchy-Schwarz-Ungleichung, d.h. $a(v, w) \leq \varepsilon \|v\| \|w\|$ mit $\varepsilon \in (0, 1)$. Dann konvergiert das Verfahren gegen die Lösung $u^* \in H$ und es gilt $\|u^{k+1} - u^*\| \leq \varepsilon \|u^k - u^*\|$.

Aufgabe 47 (Zweigitter-Algorithmus) (mündlich)
Implementieren Sie den Zwei-Gitter-Algorithmus aus der Vorlesung für das eindimensionale Modellproblem aus Aufgabe 43. Benutzen Sie das gedämpfte Jacobi-Verfahren aus Aufgabe 43 als Glätter und die Prolongation bzw. Restriktion sei wie in Aufgabe 44.

Experimentieren Sie mit den Parametern des Algorithmus.

Aufgabe 48 (Mehrgitter-Algorithmus) (mündlich)
Implementieren Sie den Mehrgitter-Algorithmus für die 5-Punkte-Finite-Differenzen-Diskretisierung des Poisson-Problems $-\Delta u(x) = 1$, $x \in (0, 1)^2$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Zur Erstellung der Steifigkeitsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n^2, n^2}$ zur Gitterweite $h = \frac{1}{n+1}$ können Sie die Matlab-Funktion `A=gallery('poisson',n)` benutzen. Benutzen Sie als Glätter das gedämpfte Jacobi-Verfahren und die Prolongation aus Aufgabe 42. Untersuchen Sie die Komplexität des Algorithmus, und insbesondere folgende Punkte:

(a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Gitterweite h und der Anzahl der Iterationen bei vorgegebener Genauigkeit?

(b) Wie verändert sich die Laufzeit bei Gitterverfeinerung? Vergleichen Sie dies mit dem \-Löser von Matlab.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 31.01.2011, 15.45 Uhr** beim Übungsleiter oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.