Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Martin Sauter

Numerische Mathematik IV (NumPDE 2) — Übungsblatt 13

Wintersemester 2010/2011 — 31.011.2011

Aufgabe 49 (schriftlich – 3 Punkte)

Betrachten Sie die 1d-Wellengleichung $\partial_t^2 u(x,t) - c^2 \partial_x^2 u(x,t) = 0$ auf $\Omega = (0,\pi)$ mit homogenenen Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ und Anfangswerten $u(x,t_0) = u_0(x)$ und $\dot{u}(x,t_0) = v_0(x)$, die folgende Fourier-Entwicklung besitzen:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)\,, \qquad v_0 = \sum_{n=1} b_n \sin(nx)\,.$$

Leiten Sie mit dem Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n(t) \sin(nx)$$

eine geschlossene Form für die Fourier-Koeffizienten $\hat{u}_n(t)$ her.

Aufgabe 50 (schriftlich – 5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $V = H_0^1(\Omega,\mathbb{R})$. Betrachten Sie die schwache Formulierung der Wellengleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen für $t \in (0,T)$:

$$\begin{aligned}
&(\ddot{u}(t), w)_0 + a(u(t), w) = 0 \qquad w \in V\,,\\
&u(0) = u_0 \qquad \dot{u}(0) = v_0\,.
\end{aligned}$$

Bezüglich der Schrittweite $\tau > 0$ seien die Zeitpunkte $t_n = n\tau$, $n \in \mathbb{N}$ gegeben. An den diskreten Zeitpunkten t_n sei der diskrete Ableitungsoperator $\partial_\tau u^n = \frac{1}{\tau}(u^n - u^{n-1})$, sowie der Mittelungsoperator $\{u^n\} = \frac{1}{2}(u^n + u^{n-1})$ definiert. Zeigen Sie:

(a) Für ein beliebiges Skalarprodukt $c(\cdot,\cdot)$ gilt

$$c\big(\partial_\tau u^n, \{v^n\}\big) + c\big(\{u^n\}, \partial_\tau v^n\big) = \frac{1}{\tau}\Big(c\big(u^n, v^n\big) - c\big(u^{n-1}, v^{n-1}\big)\Big)\,.$$

(b) Es seien $u^0, u^1 \in V$ gegeben und für $n \geq 2$ sei $u^n \in V$ durch

$$\big(\partial_\tau(\partial_\tau u^n), w\big)_0 + a\big(\{\{u^n\}\}, w\big) = 0\,, \quad w \in V \qquad ,$$

bestimmt. Dann gilt für alle $m \geq 1$ die "diskrete Energiebilanz"

$$\tfrac{1}{2}\|\partial_\tau u^m\|_0^2 + \tfrac{1}{2}|\!|\!|\{u^m\}|\!|\!|^2 = \tfrac{1}{2}\|\partial_\tau u^1\|_0^2 + \tfrac{1}{2}|\!|\!|\{u^1\}|\!|\!|^2\,.$$

Vergleichen Sie dies mit der Energie-Abschätzung für das kontinuierliche Problem.

Aufgabe 51 (mündlich)

Es sei $\Omega = (0,\pi)$, $h = \frac{\pi}{J}$ die Ortsschrittweite zu $J \in \mathbb{N}$, sodass $x_j = jh$, $j = 0,\ldots,J$. Für die Zeitdiskretisierung für $t \geq 0$ sei die Zeitschrittweite $\tau > 0$ und somit die Zeitpunkte $t_n = n\tau$ gegeben. Betrachten Sie die 1d-Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ mit periodischen Randbedingungen, d.h. $u(0,t) = u(\pi,t)$ für alle $t \geq 0$. Implementieren Sie das folgende Finite-Differenzen-Verfahren zur Approximation $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau^2}\big(u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}\big) = \frac{c^2}{h^2}\big(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\big) \qquad n \geq 1\,,\\
&u_j^1 = u_j^0 + \tau v_j^0
\end{aligned}$$

Dabei gilt für die Anfangswerte $u_j^0 = u_0(x_j)$ und $v_j^0 = v_0(x_j)$. Untersuchen Sie folgende Aspekte:

(a) Für welche Kombinationen von Schrittweiten h und τ sowie Geschwindigkeiten $c > 0$ ist das Verfahren stabil?

(b) Welche Konvergenzordnung beobachten Sie? Konstruieren Sie sich dazu eine geeignetes Testproblem mit glatter Lösung.

Aufgabe 52 (mündlich)

Überlegen Sie sich, ob sich das explizite Finite-Differenzen-Schema aus Aufgabe 51 auf eine Finite-Elemente-Approximation mit Standard-Lagrange-Elementen übertragen lässt. Ist das entstehende Verfahren noch explizit?

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Montag, den 07.02.2011, 15.45 Uhr** beim Übungsleiter oder in der Übung abzugeben.

Service/Material:
Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numpdgln2010w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungs- und Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Übungsbetrieb:
Zur aktiven Teilnahme am Übungsbetrieb (d.h. Abgabe und Korrektur von Übungsblättern) müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Donnerstag, 10.00-12.00 Uhr.
Dr. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.