1 Skalare hyperbolische Erhaltungsgleichungen

Betrachte die Transportgleichung $\partial_t u = a\partial_x u$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ mit $u(x,0) = u_0(x)$.
Sei $h > 0$, $\tau > 0$, $\Delta = h\mathbb{Z}$, $x_j = jh$, $t_n = n\tau$, und approximiere $(I_h u(t_n)) = (u(x_j,t_n))_j$ durch $(u_j^n)_j$.

(1.1) Sei $a > 0$, und sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine Lösung der Transportgleichung.
Sei $\gamma = a\tau/h \in (0,1)$. Dann gilt für das Upwind-Verfahren

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \gamma(u_{j+1}^n - u_j^n)\,, \qquad u^0 = I_h u_0$$

die Fehlerabschätzung

$$\|I_h u(t_n) - u^n\|_{\Delta,\infty} \le C\, t_n\, h \|\partial_x^2 u\|_\infty \qquad \text{mit } \|v\|_{\Delta,\infty} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |v(x_j)|\,.$$

(1.2) Ein allgemeines Differenzenschema $E_\tau u^n = (\sum_k a_k u_{j-k}^n)_j$ für festes Verhältnis τ/h heißt

a) konsistent, wenn $\|I_h u(t_{n+1}) - E_\tau I_h u(t_n)\|_{\Delta,\infty} = o(h)$;

b) konsistent von der Ordnung p, wenn $\|I_h u(t_{n+1}) - E_\tau I_h u(t_n)\|_{\Delta,\infty} \le C\,\tau\, h^p \|\partial_x^{p+1} u\|_\infty$;

c) stabil, wenn $\|E_\tau^n\|_{\Delta,\infty} \le C_T$ für alle $n \le T/\tau$.

(1.3) Sei E_τ konsistent von der Ordnung p, es gelte

$$\|E_\tau\|_{\Delta,\infty} \le 1 + \sigma h\,.$$

Dann ist E_τ stabil und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|I_h u(t_n) - u^n\|_{\Delta,\infty} \le \gamma C \exp(a\sigma T/\gamma)\, h^p\, \|\partial_x^{p+1} u\|_\infty\,.$$

1 Skalare hyperbolische Erhaltungsgleichungen

(1.4) $\hat{E}(\xi) = \sum_k a_k \exp(ßk\xi)$ heißt das *Symbol* zum Differenzenoperator $E_\tau u^n = (\sum_k a_k u^n_{j-k})_j$.

(1.5) Wenn $\|E_\tau\|_{\Delta,\infty} \le 1$ gilt, dann gilt auch $|\hat{E}(\xi)| \le 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

(1.6) Sei $\|v\|_h = \Big(h \sum_j |v_j|^2\Big)^{1/2}$. Es gilt genau dann $\|E_\tau\|_h \le 1$, wenn $|\hat{E}(\xi)| \le 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt.

(1.7) Sei $J \in C^1(\mathbb{R})$ und $u_0 \in C(\mathbb{R})$ gegeben.
Für $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ gelte

$$\partial_t u + \partial_x J(u) = 0 \quad \text{mit} \quad u(x,0) = u_0\,.$$

Dann heißt u *starke* Lösung.

(1.8) Für $u \in L_\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ gelte

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_0^\infty u(x,t)\partial_t \phi(x,t) + J(u(x,t))\partial_x \phi(x,t)\Big)\, dt + u_0(x,0)\phi(x,0)\Big)\, dx$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$. Dann heißt u *schwache* Lösung.

(1.9) Sei $J \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\|J''\|_\infty,\ \|u_0\|_\infty \le M$.
Dann existiert $T > 0$, so dass eine starke Lösung (1.7) in $C^1(\mathbb{R} \times [0,T])$ existiert.

(1.10) Sei $\mathbb{R} \times [0,\infty) = M_L \cup \Gamma \cup M_R$ eine disjunkte Zerlegung durch eine Kurve $\Gamma = \{(\gamma(t),t) \colon t \in [0,\infty)\}$. Sei $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, so dass $u_L = u|_{M_L} \in C^1(\bar{M}_L)$ und $u_R = u|_{M_R} \in C^1(\bar{M}_R)$ Lösungen von (1.7) sind. Dann ist u genau dann schwache Lösung, wenn gilt:

$$\big(u_L(x,t) - u_R(x,t)\big)\gamma'(t) = J(u_L(x,t)) - J(u_R(x,t)) \qquad \text{für } (x,t) = (\gamma(t),t) \in \Gamma\,.$$

1 Skalare hyperbolische Erhaltungsgleichungen

(1.11) Sei u eine schwache Lösung von (1.8), und sei u unstetig entlang der Kurve $\Gamma = \{(\gamma(t), t) \colon t \in [0,\infty)\}$. Dann erfüllt u eine *Entropie-Bedingung*, wenn für die Schockgeschwindigkeit $\gamma'(t)$ gilt:

$$J'(u_L(x,t)) > \gamma'(t) = \frac{J(u_L(x,t)) - J(u_R(x,t))}{u_L(x,t) - u_R(x,t)} > J'(u_R(x,t)) \qquad \text{für } (x,t) = (\gamma(t),t) \in \Gamma\,.$$

(1.12) Sei J strikt konvex (d.h. $a = J'$ streng monoton wachsend), sei $u_0(x) = \begin{cases} u_- & x < 0 \\ u_+ & x > 0 \end{cases}$ mit $u_-, u_+ \in \mathbb{R}$. Dann ist die Entropie-Lösung gegeben durch:

$$u_- > u_+\colon \qquad u(x,t) = \begin{cases} u_- & x < ct \\ u_+ & x > ct \end{cases} \qquad \text{mit } c = \frac{J(u_-) - J(u_+)}{u_- - u_+}$$

$$u_- < u_+\colon \qquad u(x,t) = \begin{cases} u_- & x < a(u_-)t \\ a^{-1}(x/t) & a(u_-)t \le x \le a(u_+)t \\ u_+ & x > a(u_+)t \end{cases}$$

(1.13) Sei $g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein *numerischer Fluss* zu J. Er heißt konsistent, wenn $g(u,u) = J(u)$ gilt. Er definiert ein Differenzen-Verfahren in Erhaltungsform $u^{n+1} = E_\tau u^n$ mit

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\tau}{h}\Big(g^n_{j+1/2} - g^n_{j-1/2}\Big)\,, \qquad g^n_{j+1/2} = g(u_j^n, u_{j+1}^n)\,, \quad g^n_{j-1/2} = g(u_{j-1}^n, u_j^n)\,.$$

(1.14) τ/h erfüllt die CFL-Bedingung, falls $(\tau/h)\sup J'(u^n) \le 1$ gilt.

(1.15) Dann ist das Lax-Friedich-Verfahren mit $g(u,v) = \frac{1}{2}\big(J(u) - J(v)\big) + h/(2\tau)(u-v)$ stabil.

1 Skalare hyperbolische Erhaltungsgleichungen

(1.16) Sei $|u^n|_{\Delta,BV} = \sum_j |u^n_{j+1} - u^n_j|$ die diskrete Totalvariation.
Dann heißt E_τ ein TVD-Verfahren, wenn $|E_\tau u^n|_{\Delta,BV} \le |u^n|_{\Delta,BV}$ gilt.

(1.17) Das Lax-Friedrich-Verfahren ist ein TVD-Verfahren.

(1.18) Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine klassische Lösung (1.7), und der numerische Fluss $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sei konsistent mit beschränkten Ableitungen. Dann gilt für $\tau/h \le C$

$$I_h u(t_{n+1}) - E_\tau I_h u(t) = O(h^2 + \tau^2)\,.$$

(1.19) Im Folgenden sei $g \in C^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ und $u_m(x,t) = \sum u^n_j \chi_m(x,t)$ eine stückweise konstante Funktion zur diskreten Lösung (u^n_j) mit den Schrittweiten $(h_m, \tau_m) = 2^{-m}(h_0, \tau_0)$.
Sei $\|u_m\|_\infty \le K$. Wenn u_m fast überall punktweise gegen
$u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ konvergiert, dann ist u schwache Lösung von (1.8).

(1.20) Gelte zusätzlich $\|u_m\|_{\Delta_m,BV} \le K$. Dann konvergiert eine Teilfolge gegen eine schwache Lösung $u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

(1.21) Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u_h(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L_1} \le \|u_h(\cdot,0) - u(\cdot,0)\|_{L_1} + C\,t\,\|u_0\|_{BV}\sqrt{\tau}\,.$$