2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

(2.1) Eine *Deformation* ist ein orientierungserhaltendes Vektorfeld

$$\varphi\colon \bar\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

für das die Einschränkung $\varphi|_\Omega$ injektiv ist. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

$\bar\Omega$ Referenz-Konfiguration
$\boldsymbol{x} \in \bar\Omega$ Lagrange-Variable
$\bar\Omega^\varphi := \varphi(\bar\Omega)$ deformierte Konfiguration
$\boldsymbol{x}^\varphi := \varphi(\boldsymbol{x})$ Euler-Variable
$\boldsymbol{F} := D\varphi = (\partial_j \varphi_i)_{i,j=1,\dots,3}$ Deformationsgradient, wobei $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$
$J := \det \boldsymbol{F} > 0$

(2.2) Sei $V \subset \Omega$ offen mit hinreichend glattem Rand ∂V, und sei $A \subset \partial V$. Dann gilt für $V^\varphi = \varphi(V)$

$$\int_{V^\varphi} d\boldsymbol{x}^\varphi = \int_V J\, d\boldsymbol{x}, \qquad \text{und} \int_{A^\varphi} d\boldsymbol{a}^\varphi = \int_A J|\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{n}|\, d\boldsymbol{a}$$

für $A^\varphi = \varphi(A)$, wobei $\boldsymbol{n}\colon \partial V \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die äußere Normale bezeichnet.

(2.3) Für die Kofaktor-Matrix $\operatorname{Cof}\boldsymbol{F} = J\boldsymbol{F}^{-T}$ gilt die Piola-Identität $\operatorname{div}\operatorname{Cof}\boldsymbol{F} = 0$.

(2.4) Sei $\boldsymbol{T}^\varphi\colon \bar\Omega^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^{3,3}$ ein Tensorfeld, und sei

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) := J(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^{-T}$$

die *Piola-Transformation* von $\boldsymbol{T}^\varphi$. Dann gilt

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = J(\boldsymbol{x})\operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi), \qquad \operatorname{div}^\varphi = \sum \frac{\partial}{\partial x_i^\varphi}$$

und $\displaystyle\int_{\partial V} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{a} = \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{T}\, d\boldsymbol{x} = \int_{V^\varphi} \operatorname{div}^\varphi \boldsymbol{T}^\varphi\, d\boldsymbol{x}^\varphi = \int_{\partial V^\varphi} \boldsymbol{T}^\varphi\cdot\boldsymbol{n}^\varphi\, d\boldsymbol{a}^\varphi.$

2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

(2.5) Das symmetrische Tensorfeld $\boldsymbol{C}(x) := \boldsymbol{F}(x)^T \boldsymbol{F}(x)$ heißt (rechter) *Cauchy–Greenscher Verzerrungstensor*, $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I})$ heißt *Green-St.Venant-Verzerrungstensor*.

(2.6) Es gilt $\boldsymbol{C} \equiv \mathbf{I}$ in Ω genau dann, wenn $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{Q}\boldsymbol{x}$ mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{SO}(3) = \{\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3,3} : \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I},\ \det(\boldsymbol{R}) = 1\}$ eine Starrkörperbewegung ist.

(2.7) Cauchy-Axiom: Zu gegebenen Volumenkraftdichten und Oberflächenkraftdichten

$$\boldsymbol{f}^\varphi : \Omega^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{g}^\varphi : \Gamma_1^\varphi \subset \partial\Omega^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

existiert ein Vektorfeld

$$\boldsymbol{t}^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

mit folgenden Eigenschaften: Für alle $V^\varphi \subset \Omega^\varphi$ gilt

a) $\boldsymbol{t}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi) = \boldsymbol{g}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)$

b) $\int_{V^\varphi} \boldsymbol{f}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)\, d\boldsymbol{x}^\varphi + \int_{\partial V^\varphi} \boldsymbol{t}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi, \mathbf{n}^\varphi)\, d\mathbf{a}^\varphi = 0$

c) $\int_{V^\varphi} \boldsymbol{x}^\varphi \times f(\boldsymbol{x}^\varphi)\, d\boldsymbol{x}^\varphi + \int_{\partial V^\varphi} \boldsymbol{x}^\varphi \times \mathbf{t}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)\, d\boldsymbol{a}^\varphi = 0$

(2.8) Dann existiert ein Tensorfeld $T^\varphi : \Omega^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^{3,3}$ (Cauchyscher Spannungstensor) mit

$$\boldsymbol{T}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)\boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}^\varphi, \boldsymbol{n}^\varphi)$$

und

1) $\boldsymbol{T}^\varphi \cdot \boldsymbol{n}^\varphi = \boldsymbol{g}^\varphi$ auf Γ_1^φ

2) $-\mathrm{div}^\varphi\, \boldsymbol{T}^\varphi = \boldsymbol{f}^\varphi$ in Ω^φ

3) $(\boldsymbol{T}^\varphi)^T = \boldsymbol{T}^\varphi$ in Ω^φ

2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

(2.9) Die Piola-Transformation der Cauchy-Spannung $\boldsymbol{T}^\varphi$ definiert den

1. Piola–Kirchhoff-Spannungstensor $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) := J(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)\boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{x})\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{3,3}$.

Für $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = J(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)$ und $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = J(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{n}|\boldsymbol{g}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi)$ gilt

$$\int_\Omega \boldsymbol{T} : D\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a}$$

für alle $\boldsymbol{v}\colon \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ für $\boldsymbol{x} \in \Gamma_0 := \partial\Omega \setminus \Gamma_1$.

(2.10) Kraftdichten **f** und Oberflächenkraftdichten **g** heißen *konservativ*, wenn Potentiale

$$\mathscr{F}(\psi) = \int_\Omega \hat{f}\big(\boldsymbol{x}, \psi(\boldsymbol{x}), D\psi(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{x}, \qquad \mathscr{G}(\psi) = \int_{\Gamma_1} \hat{g}\big(\boldsymbol{x}, \psi(\boldsymbol{x}), D\psi(\boldsymbol{x})\big)\, d\boldsymbol{a}$$

existieren, so dass für die Gâteaux-Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} D\mathscr{F}(\psi)[\boldsymbol{v}] &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\mathscr{F}(\psi + h\boldsymbol{v}) - \mathscr{F}(\psi)\big) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} \\ D\mathscr{G}(\psi)[\boldsymbol{v}] &= \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

(2.11) Drucklasten $\boldsymbol{T}^\varphi \cdot \mathbf{n}^\varphi = -p\boldsymbol{n}^\varphi$ sind konservativ, und für $\mathscr{G}(\psi) = -\frac{p}{3}\int_{\partial\Omega} \operatorname{Cof} D\psi\boldsymbol{n}\cdot\psi\, d\boldsymbol{a}$ gilt $\mathscr{G}(\psi) = -p\int_\Omega \det D\psi\, d\boldsymbol{x}$ und $D\mathscr{G}(\psi)[\boldsymbol{v}] = -\frac{p}{3}\int_{\partial\Omega} \operatorname{Cof} D\psi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a}$.

2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Sei $\mathrm{Sym}(3) = \{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3\times3} \colon \mathbf{S}^T = \mathbf{S}\}$ and $\mathbb{R}^{3\times3}_+ = \{\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{3\times3} \colon \det \boldsymbol{F} > 0\}$.

(2.12) Ein Material heißt *elastisch*, wenn eine Antwortfunktion

$$\hat{\boldsymbol{T}}^D \colon \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{3\times3}_+ \longrightarrow \mathrm{Sym}(3)$$

existiert mit

$$\boldsymbol{T}^\varphi(\boldsymbol{x}^\varphi) = \hat{\boldsymbol{T}}^D\big(\boldsymbol{x}, D\varphi(\boldsymbol{x})\big)\,.$$

Wir fordern, dass die Antwortfunktion koordinatenunabhängig (objektiv) ist, d.h.

$$\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^T, \qquad \boldsymbol{Q} \in \mathrm{SO}(3)\,.$$

(2.13) Ein elastische Material heißt *homogen*, wenn $\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}) = \hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{F})$ gilt.
Es heißt *isotrop*, wenn $\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}) = \hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F})$ für alle $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{SO}(3)$ gilt.

(2.14) Die Spannungsantwort ist dann und nur dann isotrop, wenn gilt

$$\hat{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}) = \bar{\boldsymbol{T}}^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T) = \beta_0(\iota_{\mathbf{B}})\boldsymbol{I} + \beta_1(\iota_{\mathbf{B}})\boldsymbol{B} + \beta_2(\iota_{\mathbf{B}})\boldsymbol{B}^2\,, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\,,$$

wobei $\beta_j \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ nur von $\iota_{\mathbf{B}} = \big(\mathrm{trace}\,\boldsymbol{B}, \frac{1}{2}\big((\mathrm{trace}\,\boldsymbol{B})^2 - \mathrm{trace}\,\boldsymbol{B}^2, \det \boldsymbol{B}\big)$ abhängt.

(2.14) In der Nähe der Ruhelage gilt für den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $\Sigma = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}$

$$\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{C}) = \lambda(\boldsymbol{x})\,\mathrm{trace}(\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E} + o(\boldsymbol{E})\,.$$