3 Festkörpermodelle mit Nebenbedingungen

(3.1) Sei $\mathscr{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u\, dx - \int_\Omega fu\, dx$.
Dann ist $\mathscr{E}(\cdot)$ in $H^1_0(\Omega)$ nach unten beschränkt und koerziv, d.h. $\mathscr{E}(v) \to \infty$ für $\|v\|_1 \to \infty$.

(3.2) Seien $V_h = \mathrm{span}\{\phi_z \colon z \in \mathscr{N}_h\}$ lineare Lagrage-Elemente mit Knotenpunkten $\mathscr{N}_h \subset \bar{\Omega}$, sei $\chi \in C(\bar{\Omega})$ ein Hindernis, und sei $K_h = \{v_h \in V_h \colon v_h(z) \geq \chi(z),\ z \in \mathscr{N}_h\}$ die zulässige Menge.

a) Dann existiert genau ein $u_h \in K_h$ mit $\mathscr{E}(u_h) \leq \mathscr{E}(v_h)$ für alle $v_h \in K_h$.

b) $u_h \in V_h$ ist eindeutig durch $\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla(v_h - u_h)\, dx \geq \int_\Omega f(v_h - u_h)\, dx$ für alle $v_h \in K_h$ charakterisiert.

(3.3) Sei $K = \{v \in H^1_0(\Omega) \colon v \geq \chi$ fast überall in $\Omega\}$ die zulässige Menge.

a) Dann existiert genau ein $u \in K$ mit $\mathscr{E}(u) \leq \mathscr{E}(v)$ für alle $v \in K$.

b) $u \in V$ ist eindeutig durch $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v - u)\, dx \geq \int_\Omega f(v - u)\, dx$ für alle $v \in K$ charakterisiert.

(3.4) Sei $u \in K$ Lösung von (3.3), $u_h \in K_h$ Lösung von (3.2), und es gelte $\Delta u \in L_2(\Omega)$. Dann gilt

$$\|\nabla(u - u_h)\|_0 \leq \inf_{v_h \in K_h} \inf_{v \in K} \Big(\|\nabla(u - v_h)\|_0^2 + 2\,\|f + \Delta u\|_0 \big(\|u - v_h\|_0 + \|u_h - v\|_0\big)\Big)^{1/2}.$$

3 Festkörpermodelle mit Nebenbedingungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C$ mit $|\Gamma_D|_{d-1} > 0$. Sei $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\,dx - \ell(\boldsymbol{u})$ mit $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \mathrm{sym}(D\boldsymbol{u})$ und $\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu_S\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_S\,\mathrm{trace}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{I}$ und $\ell(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dx + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\,da$.

(3.5) Kornsche Ungleichung: Es existiert $C > 0$ mit $\|D\boldsymbol{v}\|_0 \le C\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_0$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ mit $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^d) \colon \boldsymbol{v}_{|\Gamma_D} = \boldsymbol{0}\}$. Dann ist $\mathscr{E}(\cdot)$ in $\boldsymbol{V}$ nach unten beschränkt und koerziv.

(3.6) Sei $\chi \colon \Gamma_C \longrightarrow [0,\infty)$ eine Abstandsfunktion und $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \colon \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \le \chi$ fast überall in $\Gamma_C\}$.

a) Es existiert genau ein $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ mit $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}) \le \mathscr{E}(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}$.

b) Es gilt $\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,dx \ge \ell(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}$.

c) Es existiert $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma_C)$ mit $\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,dx + \langle\lambda, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\rangle = \ell(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ und $\langle\lambda, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\rangle \ge 0$ für alle $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_{|\Gamma_C} \ge 0$ und $\langle\lambda, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} - \chi\rangle = 0$.

(3.7) Sei $\boldsymbol{K}_h = \{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h \colon \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}(z) \le \chi(z)$ für $z \in \mathscr{N}_h \cap \Gamma_C\}$.

a) Es existiert genau ein $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{K}_h$ mit $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}_h) \le \mathscr{E}(\boldsymbol{v}_h)$ für alle $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h$.

b) Es gilt $\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h)\,dx \ge \ell(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h)$ für alle $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h$.

c) Es existiert $\lambda_h \colon \mathscr{N}_h \cap \Gamma_C \longrightarrow [0,\infty)$ mit $\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h)\,dx + \langle\lambda_h, \boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{n}\rangle_h = \ell(\boldsymbol{v}_h)$ für alle $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h$ und $\langle\lambda_h, \boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{n} - \chi\rangle_h = 0$. Dabei ist $\langle\lambda_h, w_h\rangle_h = \sum_{z\in\mathscr{N}_h\cap\Gamma_C} \omega_h\lambda_h(z)w_h(z)$.

(3.8) Wähle $\lambda_h^0 \ge 0$ und $\alpha > 0$. Berechne $(\boldsymbol{u}_h^k, \lambda_h^k)$ mit $\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h^k) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h)\,dx + \langle\lambda_h^k, \boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{n}\rangle_h = \ell(\boldsymbol{v}_h)$ für alle $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h$ und $\lambda_h^k = \max\{0, \lambda_h^{k-1} + \alpha(\boldsymbol{u}_h^k\cdot\boldsymbol{n} - \chi)\}$ für $k = 1,2,3,\ldots$ Dann gilt

$$\alpha\sum_{k=1}^\infty \mathscr{E}(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_h^k) \le \|\lambda_h - \lambda_h^0\|_h^2.$$

3 Festkörpermodelle mit Nebenbedingungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ mit $|\Gamma_D|_{d-1} > 0$. Sei $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\,dx - \ell(\boldsymbol{u})$ mit $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \mathrm{sym}(D\boldsymbol{u})$ und $\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu_S\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_S \,\mathrm{trace}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{I}$ und $\ell(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dx + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\,da$.

(3.9) Definiere $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^d)\colon\ \boldsymbol{v}_{|\Gamma_D} = \boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{S} = L_2(\Omega, \mathrm{Sym}(d))$ und $\mathscr{D}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{C}^{-1} : \boldsymbol{\tau}\,dx$.
Für $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{S}$ ist äquivalent:

a) $\mathscr{E}(\boldsymbol{u}) \le \mathscr{E}(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$;

b) $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_0 = \ell(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$;

c) $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{S}$ ist Sattelpunkt von $\mathscr{L}_{\mathrm{el}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{u}) = \mathscr{D}(\boldsymbol{\sigma}) + \ell(\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))_0$.
Dann ist $\mathscr{D}(\boldsymbol{\sigma}) \le \mathscr{D}(\boldsymbol{\tau})$ für alle $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{S}(\ell) = \{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{S}\colon\ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_0 = \ell(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}$.

(3.10) Sei $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{\tau} \in S\colon\ |\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}| \le K_0\}$ mit $\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{d}\,\mathrm{trace}(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{I}$ und $K_0 > 0$.
Seien $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{V}$ lineare Lagrange-Elemente und $\boldsymbol{S}_h \subset \boldsymbol{S}$ stückweise konstant.
Definiere $\boldsymbol{K}_h(\ell) = \boldsymbol{K}_h \cap \boldsymbol{S}(\ell)$.

(3.11) $\boldsymbol{\sigma}_h \in \boldsymbol{K}_h$ löst das Hencky-Problem, falls $\mathscr{D}(\boldsymbol{\sigma}_h) \le \mathscr{D}(\boldsymbol{\tau}_h)$ für alle $\boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{K}_h$.

(3.11) Sei $\Gamma_h \subset \{\gamma \in L_2(\Omega)\colon\ \gamma \ge 0\}$ stückweise konstant.
$(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{u}_h,\gamma_h) \in \boldsymbol{V}_h\times\boldsymbol{S}_h\times\Gamma_h$ sei ein KKT-Punkt, d.h.

a) $\boldsymbol{\sigma}_h = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) - \gamma_h \frac{\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\sigma}_h}{|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\sigma}_h|}$;

b) $(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h))_0 = \ell(\boldsymbol{v}_h)$ für alle $\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h$;

c) $\gamma_h \ge 0$, $|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\sigma}_h| - K_0 \le 0$, $\gamma_h(|\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\sigma}_h| - K_0) = 0$.

Dann ist $(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{u}_h,\gamma_h)$ Sattelpunkt des Lagrange-Funktionals

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{u}_h,\gamma_h) = \mathscr{D}(\boldsymbol{\sigma}_h) + \ell(\boldsymbol{u}_h) - (\boldsymbol{\sigma}_h,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h))_0 + \int_\Omega \gamma_h(|\mathrm{dev}(\boldsymbol{\sigma}_h)| - K_0)\,dx$$

und $\boldsymbol{\sigma}_h$ löst das Hencky-Problem.

3 Festkörpermodelle mit Nebenbedingungen

Sei $d(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{C}^{-1} : \boldsymbol{\tau}\,dx$, und sei $P_{\boldsymbol{K}} : \boldsymbol{S} \longrightarrow \boldsymbol{K}$ die Orthogonalprojektion auf $\boldsymbol{K}$ bezüglich des Skalarprodukts $d(\cdot,\cdot)$, d.h. $d(\boldsymbol{\tau} - P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta} - P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\tau}) \le 0$ für alle $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{K}$.

(3.12) $\boldsymbol{\sigma} = P_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))$ ist äquivalent zu

a) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \gamma \frac{\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}|}$;

b) $\gamma \ge 0$, $|\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}| - K_0 \le 0$, $\gamma(|\operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}| - K_0) = 0$.

Sei $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$. Es gilt $\gamma = 2\mu \max\{0, |\operatorname{dev}(\boldsymbol{\theta})| - K_0\}$ und $\boldsymbol{P_K}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} - \gamma \frac{\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}|}$.

(3.13) Sei $J(\boldsymbol{u}) = \mathscr{E}(\boldsymbol{u}) - \mathscr{D}(P_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))$. Dann ist $J(\cdot)$ konvex und differenzierbar, und es gilt $DJ(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}] = (P_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_0 - \ell(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$.

(3.14) Es existiere ein $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h \in \boldsymbol{S}_h(\ell)$ mit $|\operatorname{dev}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h)| - K_0 \le \delta_h < 0$. Dann gilt für $\boldsymbol{\eta}_h \in S_h$ mit $\|\boldsymbol{\eta}_h\|_\infty \le \delta_h$

$$(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\eta}_h)_0 \le J(\boldsymbol{u}) + C\,.$$

Also ist $J(\cdot)$ koerziv in $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Verallgemeinertes Newton-Verfahren:
S0) Wähle $\boldsymbol{u}_h^0 \in \boldsymbol{V}_h$. Setze $k = 0$.
S1) Berechne $\boldsymbol{\theta}_h^k = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^k)$ und $r^k(\boldsymbol{v}_h) = (P_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{\theta}_h^k), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h))_0 - \ell(\boldsymbol{v}_h)$. Falls $\|r^k\|$ klein: STOP
S2) Berechne $\boldsymbol{w}_h^k \in \boldsymbol{V}_h$ mit $(\boldsymbol{C}^k : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_h^k), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_h))_0 = -r^k(\boldsymbol{v}_h)$ mit $\gamma_h^k = \max\{0, |\operatorname{dev}(\boldsymbol{\theta}_h^k)| - K_0\}$
und $\boldsymbol{C}^k : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\gamma_h^k}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k|}\Big(\operatorname{dev}\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k|}\boldsymbol{\varepsilon} : \operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k\Big) - \frac{\operatorname{sgn}(\gamma_h^k)}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k|}\frac{\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k}{|\operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k|}\boldsymbol{\varepsilon} : \operatorname{dev}\boldsymbol{\theta}_h^k$.
Setze $\boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^k + t_k \boldsymbol{w}^k$ mit Schrittweite $t_k \in (0,1]$; setze $k := k+1$ und gehe zu S1).