4 Multilevel-Verfahren: Eine Zweilevel-Methode

Seien $V_H \subset V_h \subset V \subset H$ Finite-Elemente-Räume, $a\colon V_h \times V_h \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, V-elliptische und beschränkte Bilinearform, $|||v||| = \sqrt{a(v,v)}$ und $\|\cdot\|_0$ Norm in H.
Sei $A_h\colon V_h \longrightarrow V_h'$ definiert durch $\langle A_h v_h, w_h\rangle = a(v_h, w_h)$.
Sei $R_h\colon V_h' \longrightarrow V_h$ definiert durch $(R_h A_h v_h, w_h)_0 = \theta_h a(v_h, w_h)$.
Sei $E_h\colon V_H \longrightarrow V_h$ definiert durch $(E_h v_H, w_h)_0 = (v_h, w_h)_0$ die Prolongation.
Sei $P_h\colon V_h \longrightarrow V_H$ definiert durch $a(P_H v_h, w_H) = a(v_h, w_H)_0$ die Galerkin-Projektion.
Sei $Q_h\colon V_h \longrightarrow V_H$ definiert durch $(Q_H v_h, w_H)_0 = (v_h, w_H)_0$ die L_2-Projektion.
Sei $f_h \in V_h'$ und $u_h^0 \in V_h$. Für $k = 1, 2, \dots$ berechne

$$u_h^{k-1/2} = u_u^{k-1} + R_h(f_h - A_h u_h^{k-1})$$

und $c_H^k \in V_H$ mit

$$a(c_H^k, v_H) = \langle f_h, v_H\rangle - a(u_h^{k-1/2}, v_H) \qquad \text{für alle } v_H \in V_H$$

und setze $u_h^k = u_h^{k-1/2} + E_H c_H^k$
Dann gilt für die Fehlerfortpflanzung des Zweigitter-Verfahrens (mit $u_h = A_h^{-1} f_h$)

$$e_h^k = u_h^k - u_h = (\mathrm{id} - E_h P_H)\,(\mathrm{id} - R_h A_h) e_h^{k-1}$$

(4.1) Sei

1) $|||v_h|||^2 \le \theta_h^{-1} \|v_h\|_0^2$
2) $\|v_h - E_h Q_H v_h\|_0^2 \le C\theta_h\, |||v_h|||^2$

Dann gilt $|||(\mathrm{id} - E_h P_H)(\mathrm{id} - R_h A_h)||| \le \sqrt{1 - \frac{1}{C}}$.

4 Multilevel-Verfahren: W-Zyklus-Konvergenz

Seien $V_j \subset V \subset H = L_2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ Finite-Elemente-Räume der Gitterweite $h_j = 2^{-j} h_0$.
Sei $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, V-elliptische und beschränkte Bilinearform.
Sei $\|\cdot\|_0$ Norm in H. Wir setzten volle Regularität voraus: Für $f \in H$, $u \in V$ mit
$a(u,v) = (f,v)_0$ und $u_j \in V_j$ mit $(a(u_j,v_j) = (f,v_j)_0$ gelte $\|u - u_j\|_0 \le C\, h_j^2\, \|f\|_0$.

Sei $A_j\colon V_j \longrightarrow V_j$ definiert durch $(A_j v_j, w_j)_0 = a(v_j, w_j)$.
Aus der Inversen Ungleichung folgt $\|A_j\|_0 \le C h_j^{-2}$.

Sei $R_j = \theta_j \,\mathrm{id}$ mit $\theta_j \|A_j\|_0 \le 1$ und $\theta_j \ge c h_j^2$.
Sei $E_j\colon H \longrightarrow V_j$ definiert durch $(E_j v, w_j)_0 = (v, w_j)_0$ die Prolongation / L_2-Projektion.
Sei $P_j\colon V \longrightarrow V_j$ definiert durch $a(P_j v, w_j) = a(v, w_j)_0$ die Galerkin-Projektion.

(4.2) Dann gilt die

a) Approximationseigenschaft $\|u_j - E_j P_{j-1} u_j\|_0 \le C_1 h_j^2 \|A_j u_j\|_0$;

b) Glättungseigenschaft $\|A_j(\mathrm{id} - R_j A_j)^m\|_0 \le \frac{C_2}{m} h_j^{-2}$.

Definiere den W-Zyklus-Vorkonditionierer B_j rekursiv: $B_0 = A_0^{-1}$ und $c_j = B_j r_j$ durch $c_j^0 = 0$,

(S1) Glättung $c_j^k = R_j(r_j - A_j c_j^{k-1})$ für $k = 1, \dots, m$

(S2) Grobgitterkorrektur $c_j^{m+l} = E_j B_{j-1} E_j^T (r_j - A_j c_j^{m+l-1})$ für $l = 1, 2$

und $c_j = c_j^{m+2}$. Sei $\rho_j = \|(\mathrm{id} - E_j B_j E_j^T A_j)^2 (\mathrm{id} - R_j A_j)^m\|_0$ die Norm der Fehlerfortpfanzung.

(4.3) Wenn m groß genug ist, dann ist $\rho_J < 1$ unanhängig von J.

4 Multilevel-Verfahren: Unterraum-Korrektur-Verfahren

Sein V ein Finite-Elemente-Raum, $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, V-elliptische und beschränkte Bilinearform, $|||v||| = \sqrt{a(v,v)}$. Seien $V_j \subset V$ Unterräume für $j = 0,...,J$.
Sei $A\colon V \longrightarrow V'$ definiert durch $\langle Av, w\rangle = a(v,w)$. Sei $E_j\colon V_j \longrightarrow V$ die Einbettung.
Sei $A_j = E_j' A E_j\colon V_j \longrightarrow V_j'$ definiert durch $\langle A_j v_j, w_j\rangle = a(E_j v_j, E_j w_j)$. Setze $P_j = A_j^{-1} E_j' A$.

Parallele / additive Unterraum-Korrektur $c = B_a r$:

A1) Berechne $c_j = A_j^{-1} E_j' r$ für alle $j = 0$.

A2) Berechne $c = \sum_{j=0}^{J} E_j c_j$.

Es gilt $B_a = \sum_{j=0}^{J} E_j P_j$.

Sukzessive / multiplikative Unterraum-Korrektur $c = B_m r$:

M0) Setze $c^{-1} = 0$.

M1) Berechne $c^k = c^{k-1} + E_j A_j^{-1} E_j' (r - A c^{k-1})$ für $k = 0,1,...,J$.

M2) Setze $c = c^J$.

Es gilt $\mathrm{id} - B_m A = \prod_{j=0}^{J} (\mathrm{id} - E_j P_j)$.

(4.4) Voraussetzungen:

a) Stabile Zerlegung: Es existiert ein $C_0 > 0$, so dass für jedes $v \in V$ eine Zerlegung $v = \sum_{j=0}^{J} E_j v_j$ mit $v_j \in V_j$ und $\sum_{j=1}^{J} |||E_j v_j|||^2 \le C_0 \, |||v|||^2$ existiert.

b) Verschärfte Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Für $v_j \in V_j$ und $v_k \in V_k$ gelte $a(E_j v_j, E_k v_k) \le \varepsilon_{jk} \, |||E_j v_j||| \, |||v_k|||$ $(j,k = 1,...,J)$. Setze $\mathscr{E} = (\varepsilon_{jk})$.

Dann gilt $\kappa(B_a A) \le C_0(1 + \rho(\mathscr{E}))$ und $\rho(B_m A) \le \sqrt{1 - 1/((1 + 2\rho(\mathscr{E})^2) C_0)}$.

4 Multilevel-Verfahren: Unterraum-Korrektur-Verfahren

Überlappendes Schwarz-Verfahren

Sei $V \subset H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ein Finite-Elemente-Raum und $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^J \bar{\omega}_j$ eine überlappende Zerlegung von Ω. Sei $1 = \sum_{j=1}^J \theta_j$ eine zugehörige Zerlegung der 1, d.h. $0 \le \theta_j(x) \le 1$ und $\operatorname{supp} \theta_j \subset \bar{\omega}_j$.
Sei $\max_j \{k \colon \omega_j \cap \omega_k \neq \emptyset\} \le C_1$.
Sei $V_0 \subset V$ ein Grobgitterraum der Gitterweite H, und sei $V_j = \{v \in V \colon \operatorname{supp}(v) \subset \bar{\omega}_j\}$.

(4.5) Sei $\|\nabla \theta_j\|_\infty \le 1/\delta$. Dann gilt $C_0 \le CH/\delta$ und $\rho(\mathscr{E}) \le C_1$, d.h. die Konvergenzrate des überlappenden Schwarz-Verfahren ist abhängig von H/δ.

V-Zyklus mit Gauss-Seidel-Glätter

Seien $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_J = V$ geschachtelte Finite-Elemente-Räume der Schrittweite $H_j = 2^{-j} h_0$. Sei $V_j = \operatorname{span}\{\phi_{j,z} \colon z \in \mathscr{N}_j\}$. Definiere $V_{j,z} = \operatorname{span}\{\phi_{j,z}\}$.
Der Mehrgitter-V-Zyklus mit Gauss-Seidel-Glätter entspricht dem multiplikativen Unterraum-Verfahren zur Zerlegung $V = V_0 + \sum_{j=1}^J \sum_{z \in \mathscr{N}_j} V_{j,z}$.

(4.6) Es gilt C_0 und $\rho(\mathscr{E})$ sind unabhängig von h_J und von J beschränkt, d.h. die Konvergenzrate des Mehrgitter-V-Zyklus mit Gauss-Seidel-Glätter ist unabhängig von der Anzahl der Level und der Gitterweite.