5 Die Anfangsrandwertaufgabe der Wellengleichung

Elastische Wellen in Festkörpern: $\rho\partial_t^2\boldsymbol{u} - \operatorname{div}\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$
Druckwellen: $\partial_t^2 u - c^2\Delta u = f$
Sei $V_0 = H_0^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$ und $a(\cdot,\cdot)$ eine V_0-elliptische, beschränkte Bilinearform.
Betrachte $(\partial_t^2 u(t),\varphi)_0 + a(u(t),\varphi) = (f(t),\varphi)_0$ für alle $\varphi \in V_0$ und $u(t) = g(t)$ auf $\partial\Omega$ für alle $t \in (0,T)$ und Anfangswerten $u(0) = u_0$, $\partial_t u(0) = v_0$. Sei $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$,
$V_T = H^1(\Omega_T,\mathbb{R}^m) \subset C([0,T],H^1(\Omega,\mathbb{R}^m))$ und $V_{T,0} = \{v \in V_T \colon v(t) \in V_0\}$.

(5.1) $u \in V_T$ heißt *schwache Lösung* der Wellengleichung, wenn gilt: $u - g \in V_{T,0}$, $u(0) = u_0$, und

$$\int_{\Omega_T} \partial_t u \partial_t \varphi \, dxdt - \int_0^T a(u,\varphi)\, dt + \int_\Omega v_0\varphi(0)\, dx + \int_{\Omega_T} f\varphi\, dxdt = 0 \text{ für alle } \varphi \in V_{T,0} \text{ mit } \varphi(T) = 0.$$

Wähle $n \in \mathbb{N}$, $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$. Sei $u^0 = u_0$, $u^1 = u^0 + \tau v_0$, und
$\frac{1}{\tau^2}(u^n - 2u^{n-1} + u^{n-2},\varphi)_0 + \frac{1}{2}a(u^n + u^{n-1},\varphi) = (f(t_n),\varphi)_0$ für alle $\varphi \in V_0$.

(5.2) Sei $f \equiv 0$ und $g \equiv 0$. Dann gilt $\max_{1,\dots,n}\left(\frac{1}{\tau}\|u^n - u^{n-1}\|_0 + |||u^n|||\right) \le C\big(|||u_0||| + |||v_0|||\big)$.

Sei $u^N(t) = \frac{t_n - t}{\tau}u^{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{\tau}u^n$. Dann gilt $\|u^N\|_{V_T} \le C\big(|||u_0||| + |||v_0|||\big)$.

(5.3) $\int_{\Omega_T} \partial_t u^N \partial_t \varphi\, dxdt - \int_0^T a(u^N,\varphi)\, dt + \int_\Omega v_0\varphi(0)\, dx \longrightarrow 0$ für $\tau \longrightarrow 0$.

(5.4) Es existiert eine schwache Lösung $u \in V_T$ der Wellengleichung.

5 Die Anfangsrandwertaufgabe der Wellengleichung

Sei $V_h \subset H^1_0(\Omega,\mathbb{R}^m)$ ein Finite-Elemente-Raum, und sei $P_h\colon H^1(\Omega,\mathbb{R}^m) \longrightarrow V_h$ die Galerkin-Projektion mit $a(P_h u,\varphi_h) = a(u,\varphi_h)$ für alle $\varphi_h \in V_h$.

Wähle $N \in \mathbb{N}$, $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$. Sei $u^0 = P_h u_0$, $u^1 = P_h(u^0 + \tau v_0)$, und

$$\frac{1}{\tau^2}(u_h^n - 2u_h^{n-1} + u_h^{n-2},\varphi_h)_0 + \frac{1}{4}a(u_h^n + 2u_h^{n-1} + u_h^{n-1},\varphi_h) = (f(t_{n-1}),\varphi_h)_0 \text{ für alle } \varphi_h \in V_h\,.$$

für $n = 2,...,N$. Setze $u_h^{n-1/2} = \frac{1}{2}(u_h^n + u_h^{n-1})$ und $t_{n-1/2} = \frac{1}{2}(t_n + t_{n-1})$.

(5.4) Es gilt

$$\|\frac{1}{\tau}(u_h^n - u_h^{n-1})\|_0^2 + |||u_h^{n-1/2}|||^2 = \|\frac{1}{\tau}(u_h^1 - u_h^0)\|_0^2 + |||u_h^{1/2}|||^2 + 2\tau\sum_{k=2}^{n}(f(t_{k-1}),u_h^k - u_h^{k-2})_0\,.$$

(5.5) Diskretes Gronwall-Lemma: Für $\eta_n > 0$ und $\alpha > 0$ gelte $\eta_n \le \alpha + \tau\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k$.
Dann gilt $\eta_n \le \alpha\exp(t_n)$.

(5.6) Es gilt (unter der Voraussetzung von voller Regularität)

$$\|\frac{1}{\tau}(u_h^n - u_h^{n-1}) - \partial_t u(t_{n-1/2})\|_0 + \|u_h^{n-1/2} - u(t_{n-1/2})\|_0 + h|||u_h^{n-1/2} - u(t_{n-1/2})||| \le C(u)(h^2 + \tau^2)\,.$$

5 Discontinuous Galerkin für die Wellengleichung

Sei $\mathscr{T}_h$ eine Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit Gitterweite h_K für $K \in \mathscr{T}_h$. Sei $\mathscr{F}_h$ die Menge der Elementseiten $F \subset \partial K$. Sei $c_K \in [c_{\min}, c_{\max}] \subset (0,\infty)$ für $K \in \mathscr{T}_h$. Definiere $\delta_F = \alpha c_F h_F^{-1}$ und

$$a_h(v,\phi) = \sum_{K\in\mathscr{T}_h} \int_K c_K \nabla v \cdot \nabla\phi \, dx + \sum_{F\in\mathscr{F}_h} \int_F \big(\delta_K [v]\cdot[\phi] - [v]\cdot\{c\nabla\phi\} - [\phi]\cdot\{c\nabla v\}\big)\, da$$

mit $[v] = v_K \mathbf{n}_K + v_{K'}\mathbf{n}_{K'}$, $\{w\} = \frac{1}{2}(w_K + w_{K'})$, $h_F = \min\{h_K, h_{K'}\}$, $c_F = \max\{c_K, c_{K'}\}$ für $F = K\cap K'$ und $[v] = v_K\mathbf{n}_K$, $\{w\} = w_K$, $h_F = h_K$, $c_F = c_K$ für $F \subset K \cap \partial\Omega$.

Sei $V_h = \{v \in L_2(\Omega)\colon\, v_K \in \mathbb{P}^q\}$ und Sei $W_h = \{v \in L_2(\Omega,\mathbb{R}^d)\colon\, w_K \in (P^{q-1})^d\}$ mit $q \geq 1$.

Definiere $\mathscr{L}_c(v) \in W_h$ durch $(\mathscr{L}_c(v), w_h)_0 = \sum_{F\in\mathscr{F}_h} \int_F \delta_F [v]\{c w_h\}\, da$ für alle $w_h \in V_h^d$,

$$\tilde a_h(v,\phi) = \sum_{K\in\mathscr{T}_h} \int_K \big(c_K \nabla v\cdot\nabla\phi - \mathscr{L}_c(v)\cdot\nabla\phi - \nabla v\cdot\mathscr{L}_c(\phi)\big)\, dx + \sum_{F\in\mathscr{F}_h} \int_F \delta_F [v]\cdot[\phi]\, da,$$

und $|||v|||_h = \Big(\sum_{K\in\mathscr{T}_h} \int_K c_K |\nabla v|^2\, dx + \sum_{F\in\mathscr{F}_h} \int_F \delta_F |[v]|^2\, da\Big)^{1/2}$.

(5.7) Sei $\sum_{F\in\mathscr{F}_h} h_F \int_F |w_h|^2\, da \leq C_{\rm inv} \|w_h\|_0^2$ und $\alpha \geq (2 C_{\rm inv} c_{\max}/c_{\min})^2$.

Dann gilt $(\mathscr{L}_c(v), \nabla\phi)_0 \leq \frac{1}{4} |||v|||_h |||\phi|||_h$ und

$$\tilde a_h(v,\phi) \leq 2 |||v|||_h |||\phi|||_h, \qquad \tilde a_h(v,v) \geq \frac{1}{2} |||v|||_h^2 \quad \text{für } v,\phi \in V_h + H^1(\Omega).$$

5 Discontinuous Galerkin für die Wellengleichung

Sei $u_h \in C^2([0,T],V_h)$ die Discontinuous-Galerkin-Lösung von

$$(\partial_t^2 u_h(t),\phi_h)_0 + a_h(u_h(t),\phi_h) = (f(t),\phi_h)_0\,, \qquad \phi_h \in V_h\,,$$

und es existiere eine Lösung $u \in C^1([0,T],H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ mit $\partial_t^2 u \in L_1([0,T],H^2(\Omega))$ von

$$(\partial_t^2 u(t),\phi)_0 + \tilde{a}_h(u(t),\phi) = (f(t),\phi)_0\,, \qquad \phi \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Dann gilt für den Fehler $e(t) = u(t) - u_h(t) \in V(h) = H^1(\Omega) + V_h$

$$(\partial_t^2 e(t),\phi_h)_0 + \tilde{a}_h(e(t),\phi_h) = \sum_{F\in\mathscr{F}_h} [\phi_h]\cdot\{c\nabla u - \Pi^F c\nabla u\}\,da\,, \qquad \phi_h \in V_h\,.$$

Dabei sei $\Pi^F\colon L_2(F,\mathbb{R}^d) \longrightarrow V_h^d$ die L_2-Projektion. Es gilt $\|w-\Pi^F w\|_0 \le Ch_F^{1/2}\|\nabla w\|_0$.
Damit ergibt sich die Konsistenzfehlerabschätzung

$$|(\partial_t^2 e(t),\phi_h)_0 + a(e(t),\phi_h)| \le C\,h |||\phi_h|||_h \|u\|_2\,.$$

(5.8) Es gilt die semi-diskrete Fehler-Abschätzung

$$\|\partial_t e(t)\|_0 + |||e(t)|||_h \le C\,t\,h\Big(\|\partial_t e(0)\|_0 + |||e(0)|||_h + \|u\|_{C^1([0,t],H^2(\Omega))} + \|\partial_t^2 u\|_{L_1([0,t],H^2(\Omega))}\Big)\,.$$