Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 1

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 1 (mündlich)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und x^* sei ein lokales Minimum von f entlang jeder Linie, die durch x^* geht, d.h. für alle $d \in \mathbb{R}^n$ nimmt $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(t) = f(x^* + td)$ sein Minimum bei $t = 0$ an. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $Df(x^*) = 0$.

(b) x^* muss kein lokales Minimum von f sein. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

- Zeigen Sie, dass für $n = 2$ und f gegeben durch $f(x_1, x_2) = (x_2 - px_1^2)(x_2 - qx_1^2)$ mit $0 < p < q$, der Punkt $x^* = (0, 0)$ ein lokales Minimum von f entlang jeder Linie durch x^* ist.
- Zeigen Sie, dass für $p < m < q$ und $x_1 \neq 0$ stets $f(x_1, mx_1^2) < 0$ gilt.

Aufgabe 2 (mündlich)
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar mit Lipschitz stetiger Ableitung, d.h. es gibt ein $L > 0$, so dass für alle $x, y \in K$ gilt:

$$\|Df(x) - Df(y)\|_2 \leq L\,\|x - y\|_2$$

Zeigen Sie für $K = \mathbb{R}^n$, dass dann gilt:

$$f(x + y) \leq f(x) + Df(x)y + \frac{L}{2}\|y\|^2$$

Aufgabe 3 (schriftlich) (4 Punkte)
Zu $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sei das unrestringierte Optimierungsproblem

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

gegeben. Das *Gradientenverfahren* ist, ausgehend von einem Startwert $x^0 \in \mathbb{R}^n$, für $k > 0$ gegeben durch die Iteration

$$(GV) \qquad x^k = x^{k-1} - t_{k-1}\nabla f(x^{k-1}),$$

wobei $t_{k-1} > 0$ eine (i.A. zu bestimmende) Schrittweite ist. Im Folgenden sei aber die Schrittweite fest vorgegeben und in jedem Schritt gleich, d.h. $t_k \equiv t$ für alle $k \geq 0$. Sei nun x^* eine lokale Lösung von (P) und auf $K := B(x^*, \|x^* - x^0\|_2) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x^* - y\|_2 \leq \|x^* - x^0\|\}$ sei f gleichmäßig konvex und die Ableitung von f sei Lipschitz stetig auf K (siehe Aufgabe 2).
Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass dann für genügend kleines $t > 0$ die obige Iteration gegen x^* konvergiert, d.h. $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$.

Aufgabe 4 (mündlich)
Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, positiv definit mit Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Das quadratische Minimierungsproblem

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad \frac{1}{2}x^T Q x \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit Lösung $x^* = 0$, soll ausgehend von $x^0 \in \mathbb{R}^n$ mit der Iteration (GV) aus Aufgabe 3 gelöst werden, wobei jetzt die Schrittweite $\alpha_k > 0$ allerdings nicht vorgegeben, sondern zu bestimmen ist.
Zeigen Sie:

(a) Für $k > 0$ gilt: $\|e^k\| \leq \max\{|1 - t_{k-1}\lambda_1|, |1 - t_{k-1}\lambda_n|\}\|e^{k-1}\|$, wobei mit $e^k = x^k - x^*$ der Fehler im k-ten Schritt bezeichnet sei.

(b) Die optimale Schrittweite ist $t_k^* = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$ für alle $k \geq 0$.

Service/Material:
Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Literatur:

Geiger, Carl; Kanzow Christian: Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben.
Geiger, Carl; Kanzow Christian: Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben, Springer-Verlag.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung

Scheinkriterien:
Zum Erhalt eines Übungsscheins müssen mindestens 50% der möglichen Punkte in den schriftlichen Aufgaben erreicht werden. Zusätzlich muss einmal eine Aufgabe in den Übungen vorgerechnet werden. Die schriftlichen Aufgaben sind einzeln abzugegeben, das Vorrechnen in den Übungen kann je nach Aufgabenumfang auch in Gruppen geschehen. Melden Sie sich dazu bitte vorher beim Übungsleiter an.