Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 10

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 36 (mündlich)

Es sei $S \in \mathbb{S}^n_{++}$ und $B \in \mathbb{S}^n$. Zeigen Sie, dass die Lösung $X \in \mathbb{S}^n$ der Lyapunov-Gleichung $SX + XS = B$ eindeutig ist.

Aufgabe 37 (schriftlich – 5 Punkte)

Zu $Q \in \mathbb{S}^n_{++}$ und $a, c \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, sei die restringierte, quadratische Optimierungsaufgabe

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{unter} \quad h(x) = 0\,.$$

gegeben, wobei $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx$ und $h(x) = a^Tx$.

(a) Bestimmen Sie die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von (P) und den zugehörigen Lagrange-Parameter $y^* \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie zu festem $\alpha > 0$ das Minimum x^α der zugehörigen unrestringierten Penalty-Funktion $f_\alpha(x) = f(x) + \dfrac{\alpha}{2}(h(x))^2$.

(c) Zeigen Sie $x^* = \lim\limits_{\alpha\to\infty} x^\alpha$.

(d) Zeigen Sie $y^* = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \alpha\, h(x^\alpha)$.

(e) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von $f_\alpha(x)$, und zeigen Sie

$$\lim_{\alpha\to\infty} \mathrm{cond}_2\big(D^2 f_\alpha(x^*)\big) = \infty\,.$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{cond}_2(\cdot)$ die Spektralnorm.

Hinweis: Je nach Vorgehen kann die Sherman-Morrison-Formel (siehe Übungsblatt 5 - Aufgabe 19) verwendet werden.

Aufgabe 38 (mündlich)

Betrachten Sie folgende Optimierungsaufgabe in $\mathbb{R}$:

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad x^2 \qquad \text{unter} \quad x - 1 = 0$$

mit Lösung $x^* = 1$. Überlegen Sie, ab welchem $\alpha > 0$ die zugehörige ℓ_1-Penalty-Funktion $f_\alpha(x) = x^2 + \alpha|x-1|$ exakt in x^* ist.

Aufgabe 39 (Augmented-Lagrange-Funktion) (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie das differenzierbare Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{unter} \quad g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0\,.$$

Hierbei sind $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ und $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Nach Einführung einer Schlupfvariablen $t \in \mathbb{R}^p$ ist die Augmented-Lagrange-Funktion (erweiterte-Lagrange-Funktion) mit dem Penalty-Parameter $\alpha > 0$ definiert durch

$$L_\alpha(x,y,z) = \min_{t\geq 0}\Big(f(x) + y^Th(x) + z^T(g(x)+t) + \frac{\alpha}{2}\big(\|h(x)\|^2 + \|g(x)+t\|^2\big)\Big)\,.$$

Ferner sei die Funktion $\widehat{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ komponentenweise definiert als

$$\big(\widehat{g}(x)\big)_{i\in\{1,\ldots,p\}} = \max\Big(-\frac{z_i}{\alpha}, g_i(x)\Big)\,.$$

Zeigen Sie, dass $L_\alpha(x,u,v)$ geschrieben werden kann als

$$L_\alpha(x,y,z) = f(x) + y^Th(x) + z^T\widehat{g}(x) + \frac{\alpha}{2}\big(\|\widehat{g}(x)\|^2 + \|h(x)\|^2\big)\,,$$

und dass $L_\alpha(x,y,z)$ bezüglich x differenzierbar ist. Geben Sie $D_xL_\alpha(x,y,z)$ an.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Mittwoch, den 16. Januar 2008, 15.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:

Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung