Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 11

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 40 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie für konvexes $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$ und Lipschitz-stetiges $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die Optimierungsaufgabe

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{unter} \quad x \in X\,.$$

$x^* \in X$ sei die Lösung von (P) und $L > 0$ bezeichne die lokale Lipschitz-Konstante von f auf einer Umgebung von x^*. Zeigen Sie, dass x^* dann auch lokales Minimum von

$$f_\alpha(x) = f(x) + \alpha\, \mathrm{dist}_X(x)$$

für alle $\alpha > L$ ist, d.h. f_α ist exakt in x^*.

Hinweis: Die Funktion $\mathrm{dist}_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist charakterisiert durch (siehe auch OT I)

$$\mathrm{dist}_X(x) = \inf_{y \in X} \|y - x\|\,.$$

Aufgabe 41 (Komplementaritätsfunktionen) (schriftlich – 3 Punkte)

Zu Funktionen $g_i \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, ..., p$ und einem Vektor $y \in \mathbb{R}^p$ heißt eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ Komplementaritätsfunktion (oder auch NCP-Funktion), falls gilt:

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g(x) \le 0,\ y \ge 0,\ y^T g(x) = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden, komponentenweise definierten Funktionen Komplementaritätsfunktionen sind:

(a) $\big(\varphi(x, y)\big)_i = \min\{-g_i(x), y_i\}\,,$

(b) $\big(\varphi(x, y)\big)_i = y_i - \max\{0, y_i + g_i(x)\}\,,$

(c) $\big(\varphi(x, y)\big)_i = g_i(x) - y_i + \sqrt{y_i^2 + (g_i(x))^2}\,.$

Aufgabe 42 (mündlich)

Betrachten Sie das quadratische Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{unter} \quad h(x) = 0\,.$$

mit $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ und $h(x) = x_1 - 1$. Die zu (P) zugehörige Augmented-Lagrange-Funktion ist gegeben durch $L_\alpha(x, y) = L(x, y) + \frac{\alpha}{2}(h(x))^2$, wobei $\alpha > 0$ ein Penalty-Parameter ist und $L(x, y) = f(x) + y h(x)$ die Lagrange-Funktion von (P) bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die eindeutige Lösung $x^* \in \mathbb{R}^2$ von (P), sowie den zugehörigen Lagrange-Multiplikator $y^* \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie das unrestringierte Minimum $x^\alpha(y)$ von $L_\alpha(x, y)$.

(c) Zeigen Sie:

$$\lim_{y \to y^*} x^\alpha(y) = x^* \qquad \text{und} \qquad \lim_{\alpha \to \infty} x^\alpha(y) = x^*\,.$$

(d) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $D_x^2 L_\alpha(x, y)$ und geben Sie ihre Spektralkondition in Abhängigkeit von α an.

(e) Zeigen Sie, dass die durch den Multiplier-Penalty-Algorithmus (8.8) erzeugte Folge $\{y^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen y^* konvergiert und es gilt:

$$|y^{k+1} - y^*| = \frac{1}{\alpha_k + 1} |y^k - y^*|\,.$$

(f) Interpretieren Sie den Zusammenhang zwischen der Kondition der Hesse-Matrix $D_x^2 L_{\alpha_k}(x, y)$ und der Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\{y^{k+1}\}$.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Mittwoch, den 23. Januar 2008, 15.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:

Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung