Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 12

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 43 (Lagrange-Newton-Verfahren) (schriftlich – 3 Punkte)
Betrachten Sie zu $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), h \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit $m \le n$ das Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{unter} \quad h(x) = 0\,.$$

(x^*, y^*) sei ein KKT-Punkt von (P) und es gelte $\operatorname{rang}(Dh(x^*)) = m$ und $d^T D_x^2 L(x^*, y^*) d > 0$ für alle $d \in \ker(Dh(x^*))$, $d \neq 0$. Das Lagrange-Newton-Verfahren versucht die Gleichung $F(x, y) = 0$ zu lösen, wobei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$ gegeben ist durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, y) \\ h(x) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass unter den obigen Voraussetzungen die Jacobi-Matrix von F in (x^*, y^*) regulär ist.

Aufgabe 44 (schriftlich – 4 Punkte)
Betrachten Sie zu $b \in \mathbb{R}^m, r \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}, G \in \mathbb{R}^{p,n}$ und $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ das SQP-Verfahren (Algorithmus (10.1) der Vorlesung) zum Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{unter} \quad Ax = b, \quad Gx \le r\,.$$

Zudem sei die Menge $\mathcal{F}_k \subset \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\mathcal{F}_k = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad = b - Ax^k, Gd \le r - Gx^k\}\,.$$

(a) Betrachten Sie den k-ten Schritt von Algorithmus (10.1), und speziell das Problem (Q_k) in S2). Es soll zusätzlich angenommen werden, dass die Matrix $H_k \in \mathbb{R}^{n,n}$ auch positiv definit ist. Formulieren Sie (Q_k) für das Problem (P).

(b) Zeigen Sie, dass $x^{k+1} - x^k$ die Projektion von $-H_k^{-1}\nabla f(x^k)$, bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{H_k}$, auf die Menge $\mathcal{F}_k$ ist. Hierbei ist wieder $\|x\|_{H_k} = \sqrt{x^T H_k x}$. Formulieren Sie hierzu die KKT-Bedingungen für das zur Projektion zugehörige Optimierungsproblem.

(c) Überlegen Sie, ob im obigen Fall linearer Nebenbedingungen die Iterierten $\{x^k\}$ für (P) zulässig sind.

Hinweis: Zu konvexem $K \subset \mathbb{R}^n$ ist die Projektion $P_K(d) \in K$ von $d \in \mathbb{R}^n$, bzgl. einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$, charakterisiert durch: $\|P_K(d) - d\| \le \|\widehat{d} - d\|$ für alle $\widehat{d} \in K$.

Aufgabe 45 (mündlich)
Für $i = 1, \dots, m$ sei $f_i \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert als

$$f(x) = \max_{1 \le i \le m} f_i(x)\,.$$

Zu $x \in \mathbb{R}^n$ sei die Menge $I(x)$ definiert als $I(x) = \{i \in \{1, \dots, m\} : f_i(x) = f(x)\}$. Zeigen Sie, dass für alle $d \in \mathbb{R}^n$, die Richtungsableitung von f in x nach d gegeben ist durch

$$Df(x; d) = \max_{i \in I(x)} Df_i(x) d\,.$$

Aufgabe 46 (mündlich)
Betrachten Sie folgendes Optimierungsproblem auf $\mathbb{R}$

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad x^2 + x^4 \qquad \text{unter} \quad x \le 0\,.$$

Die Lösung ist offensichtlich $x^* = 0$ und der zugehörige Lagrange-Parameter ist $y^* = 0$. Folglich ist diese Lösung nicht strikt komplementär. Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass strikte Komplementarität keine notwendige Bedingung für die superlineare Konvergenz des SQP-Verfahrens ist.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Mittwoch, den 30. Januar 2008, 15.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:

Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung