Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 13

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 47 (schriftlich – 4 Punkte)
Es sei $(x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ ein KKT-Punkt zu

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{unter} \quad g(x) \le 0, \quad h(x) = 0\,,$$

wobei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ und $h \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Zudem mögen die Voraussetzungen von Satz (10.2) erfüllt sein, d.h. für (x^*, y^*, z^*) seien die (CQ2) und die hinreichenden Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung erfüllt, und zudem gelte strikte Komplentarität, also $-g(x^*) + z^* > 0$. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, y, z) \\ h(x) \\ \min\{z, -g(x)\} \end{pmatrix}$$

in einer Umgebung von (x^*, y^*, z^*) stetig differenzierbar ist und die Jacobi-Matrix von F in (x^*, y^*, z^*) regulär ist.

Aufgabe 48 (Maratos-Effekt) (schriftlich – 4 Punkte)
Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem in $\mathbb{R}^2$:

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) := 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_1 \qquad \text{unter} \quad h(x) := \|x\|^2 - 1 = 0\,.$$

Die Lösung ist $x^* = (1, 0)$ und der zugehörige Lagrange-Multiplikator ist $y^* = -\frac{3}{2}$. Betrachten Sie einen Schritt des globalisierten SQP-Verfahrens (10.3) ausgehend von einem zulässigen $x^k = \binom{\cos\theta}{\sin\theta}$ und $H_k = D_x^2 L(x^*, y^*) = I$. Die Lösung von (Q_k) in S2) von Algorithmus (10.3) sei wieder mit (d^k, y^{k+1}) bezeichnet. Zeigen Sie:

$$f_{1,\alpha}(x^k + td^k) > f_{1,\alpha}(x^k) \qquad \text{für alle} \quad t > \frac{1}{2+\alpha}\,.$$

Dabei ist $f_{1,\alpha}(x) = f(x) + \alpha|h(x)|$ die ℓ_1-Penalty-Funktion zu (P).

Interpretieren Sie obige Aussage bzgl. der Konvergenzgeschwindigkeit des globalisierten SQP-Verfahrens.

Aufgabe 49 (mündlich)
Betrachten Sie zu $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $h \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das globalisierte SQP-Verfahren (10.3) zur Lösung von

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{unter} \quad h(x) = 0\,,$$

Mit $f_{1,\alpha}(x)$ sei die exakte ℓ_1-Penalty-Funktion von f gegeben, also

$$f_{1,\alpha}(x) = f(x) + \alpha\|h(x)\|_1 = f(x) + \alpha\sum_{i=1}^m |h_i(x)|\,.$$

In S2) von Algorithmus (10.3) wird im k-ten Schritt der KKT-Punkt (d^k, y^{k+1}) des quadratischen Teilproblems (Q_k) bestimmt. Der Penalty-Parameter in S3) sei jetzt allerdings fest vorgegeben, d.h. zu gegebenem $\widehat{\alpha} > 0$ gelte für $k \ge 0$ stets $\beta_i^k = \widehat{\alpha}$ für $i = 1, ..., m$. Zeigen Sie, dass bzgl. der "Meritfunktion" $f_{1,\widehat{\alpha}}$ für die Richtungsableitung in Richtung d^k folgendes gilt:

$$Df_{1,\widehat{\alpha}}(x^k; d^k) = Df(x^k)d^k - \widehat{\alpha}\|h(x^k)\|_1\,.$$

Aufgabe 50 (mündlich)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, abgeschlossen und nicht leer, sowie $F : K \to \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Variationsungleichung (VI): Finde ein $x^* \in K$, so dass

$$(VI) \qquad F(x^*)^T(x - x^*) \ge 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in K\,.$$

Zeigen Sie für beliebiges $t > 0$, dass $x^* \in K$ genau dann Lösung von (VI) ist, falls x^* Fixpunkt der Abbildung $G : \mathbb{R}^n \to K$, $G(x) = P_K(x - tF(x))$ ist. Dabei ist P_K die Projektion auf die Menge K (siehe OT I).

Betrachten Sie im Folgenden den Spezialfall $F(x) = \nabla f(x)$, wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Versuchen Sie einen Zusammenhang zwischen der Optimierungsaufgabe

$$(P) \quad \text{Minimiere} \qquad f(x) \qquad \text{auf} \quad K\,.$$

und obigem Spezialfall herzustellen. Versuchen Sie anhand der Fixpunkt-Formulierung einen Algorithmus zur Lösung von (P) zu formulieren.

Studienbegleitende Prüfung:

Die studienbegleitende Prüfung in Optimierungstheorie II findet mündlich statt. Es stehen folgende zwei Termine zur Auswahl:

Dienstag, 26. Februar 2008
Donnerstag, 6. März 2008

Falls Sie eine Prüfung ablegen wollen, melden Sie sich bitte bis zum **Freitag, 8. Februar 2008** beim Übungsleiter und geben ihre Zulassungsbescheinigung im Sekretariat ab. Ohne Zulassungsbescheinigung sind sie nicht zur Prüfung zugelassen.

Bitte wenden

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Mittwoch, den 06. Februar 2008, 15.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:

Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung