Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 14

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 52 (mündlich)

Betrachten Sie zu $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}^p$, $h : X \to \mathbb{R}^m$ die Optimierungsaufgabe (es werden keine weiteren Forderungen an f, g, h oder X gestellt)

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{auf} \quad M := \{x \in X : g(x) \le 0, h(x) = 0\}\,.$$

Mittels der Lagrange-Funktion $L(x, y, z) = f(x) + y^T h(x) + z^T g(x)$ lässt sich die zu (P) duale Aufgabe formulieren als

$$(D) \quad \text{Maximiere} \quad F(y, z) := \inf_{x \in X} L(x, y, z) \qquad \text{unter} \quad y \in \mathbb{R}^m,\ z \ge 0\,.$$

Die Funktion $-F$ ist konvex (siehe OT I - Übungsblatt 11, Aufgabe 45). Zeigen Sie: Falls $x \in X$ zu festem $(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ eine Lösung von

$$\text{Minimiere} \quad f(x) + y^T h(x) + z^T g(x) \qquad \text{unter} \quad x \in X\,,$$

ist, dann ist der Vektor $\begin{pmatrix} -h(x) \\ -g(x) \end{pmatrix}$ ein Subgradient von $-F$ in (y, z).

Aufgabe 53 (mündlich)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, sowie $f : M \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie: Zu festem $x \in M$ ist die Abbildung $d \mapsto Df(x; d)$ sublinear und beschränkt durch eine lokale Lipschitzkonstante L von f, d.h. es gilt $|Df(x; d)| \le L\|d\|$.

Hinweis: Eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt sublinear, falls gilt:

- g ist positiv homogen, d.h. $g(td) = tg(d)$ für alle $d \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$.
- g ist subadditiv, d.h. $g(d^1 + d^2) \le g(d^1) + g(d^2)$ für alle $d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 54 (mündlich)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Die Trägerfunktion $\sigma_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von M ist definiert als $\sigma_M(x) = \sup_{y \in M} y^T x$. Zudem sei $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine sublineare Funktion (siehe Hinweis zu Aufgabe 53). Zeigen Sie:

(a) Die Trägerfunktion σ_M ist sublinear und konvex.

(b) Es gibt es ein $s \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$s^T y \le p(y) \qquad \text{für alle} \quad y \in \mathbb{R}^n\,.$$

(c) Jede sublineare Funktion p ist Trägerfunktion einer Menge

$$M_p = \{s \in \mathbb{R}^n : s^T y \le p(y) \quad \text{für alle} \quad y \in \mathbb{R}^n\}\,.$$

(d) Für $p(x) = \|x\|$ ist $M_p = B(0, 1) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le 1\}$ die Euklid'sche Einheitskugel.

(e) Zeigen Sie mit (d), dass für $p(x) = \|x\|$ gilt: $\partial p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|}\,, & x \ne 0\,, \\ B(0, 1)\,, & x = 0\,. \end{cases}$

Hinweis zu (b): Für eine konvexe Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt: Es gibt ein $s \in \mathbb{R}^n$ und $C \in \mathbb{R}$, so dass $g(x) \ge s^T x + C$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (Minorisierung durch eine affine Funktion, folgt aus dem Trennungssatz).

Aufgabe 55 (mündlich)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen. Der Normalenkegel N_M der Menge M an der Stelle $x \in M$ ist gegeben durch (siehe auch OT I - Übungsblatt 4, Aufgabe 17)

$$N_M(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : s^T (y - x) \le 0 \quad \text{für alle} \quad y \in M\}\,.$$

Die Distanzfunktion zu M ist gegeben durch

$$\mathrm{dist}_M(x) = \min_{y \in M} \|y - x\| = \|x - P_M(x)\|\,.$$

und aus OT I (Übungsblatt 11, Aufgabe 47) ist bekannt, dass dist_M^2 differenzierbar ist mit $\nabla(\mathrm{dist}_M^2(x)) = x - P_M(x)$. Zeigen Sie:

$$\partial \mathrm{dist}_M(x) = \begin{cases} N_M(x) \cap B(0, 1)\,, & x \in M\,, \\ \left\{ \frac{x - P_M(x)}{\|x - P_M(x)\|} \right\}\,, & x \notin M\,. \end{cases}$$

Studienbegleitende Prüfung:

Die studienbegleitende Prüfung in Optimierungstheorie II findet mündlich statt. Es stehen folgende zwei Termine zur Auswahl:

Dienstag, 26. Februar 2008
Donnerstag, 6. März 2008

Falls Sie eine Prüfung ablegen wollen, melden Sie sich bitte bis zum **Freitag, 8. Februar 2008** beim Übungsleiter und geben ihre Zulassungsbescheinigung im Sekretariat ab. Ohne Zulassungsbescheinigung sind sie nicht zur Prüfung zugelassen.