Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 2

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 5 (schriftlich) (3 Punkte)
Zu einer Abstiegsrichtung $d \in \mathbb{R}^n$ ist die exakte Schrittweite $t^{\min}$ charakterisiert durch

$$f(x + t^{\min} d) = \min_{t \geq 0} f(x + td)$$

Zeigen Sie, dass für das quadratische Optimierungsproblem

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n$$

mit $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und positiv definit und $c \in \mathbb{R}^n$, die exakte Schrittweite gegeben ist durch $t^{\min} = -\dfrac{d^T \nabla f(x)}{d^T Q d}$.

Aufgabe 6 (schriftlich) (4 Punkte)
Betrachten Sie das Minimierungsproblem (P) aus Aufgabe 5 und mit $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ seien die Eigenwerte von Q bezeichnet.

(a) Zeigen Sie für das Gradientenverfahren mit exakten Schrittweiten $t_k^{\min}$ folgende Konvergenzaussage:

$$\|e^{k+1}\|_Q^2 \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} \right)^2 \|e^k\|_Q^2 \,,$$

wobei $\|x\|_Q^2 = x^T Q x$ und $e^k = x^k - x^*$.

(b) Für eine symmetrisch, positiv definite Matrix Q, ist die Spektralkondition von Q gegeben durch $\kappa = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$. Drücken Sie obige Abschätzung mit Hilfe der Kondition aus.

(c) Gegen Sie eine Abschätzung für den Fehler in der Euklid'schen Norm an.

Aufgabe 7 (mündlich)
Es seien $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathcal{L}(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^0)\}$. Außerdem sei $d \in \mathbb{R}^n$ eine Abstiegsrichtung. Die Schrittweitenregel von Curry lautet:

$$\text{Bestimme} \quad t^c = \arg\min_{t \geq 0} \{\nabla f(x + td)^T d = 0\} = \min\{t \geq 0 : \nabla f(x + td)^T d = 0\}\,.$$

Zeigen Sie: Falls $\mathcal{L}(x^0)$ kompakt, und ∇f Lipschitz stetig auf $\mathcal{L}(x^0)$, so ist die Schrittweitenregel von Curry wohldefiniert und effizient, d.h. es gibt ein $\theta > 0$ mit

$$f(x + t^c d) \leq f(x) - \theta \left(\frac{\nabla f(x)^T d}{\|d\|_2} \right)^2 .$$

Aufgabe 8 (mündlich)
Implementieren Sie das Gradientenverfahren (d.h.: $d^k = -\nabla f(x^k)$) mit der Schrittweitenregel von Armijo. Testen Sie es mit dem quadratischen Minimierungsproblem

$$\text{Minimiere} \quad \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n$$

mit $Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ und $c = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$. (Die Lösung ist gegeben durch $x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.)

Implementieren Sie für diesen Spezialfall auch die exakte Schrittweitenregel und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Mittwoch, den 7. November 2007, 15.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:
Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Literatur:
Geiger, Carl; Kanzow Christian: Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben.
Geiger, Carl; Kanzow Christian: Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben, Springer-Verlag.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung