Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 3

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 9 (schriftlich) (3 Punkte)

Gegeben sei eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ sowie eine hinreichend glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zudem seien ein $x^0, y^0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass das ungedämpfte Newton-Verfahren (d.h. $t_k = 1$) invariant gegenüber affinen Transformationen ist. Betrachten Sie dazu die Folge $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, die das Newton-Verfahren zur Minimierung der Funktion $f(x)$ erzeugt, sowie die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, die das Newton-Verfahren zur Minimierung der Funktion $g(y) = f(Ay + b)$ erzeugt. Zeigen Sie:

$$x^0 = Ay^0 + b \qquad \Longrightarrow \qquad x^k = Ay^k + b \qquad \text{für alle } k \geq 0\,.$$

Ist das Gradientenverfahren ($d^k = -\nabla f(x^k)$) ebenfalls invariant gegenüber affinen Transformationen?

Aufgabe 10 (schriftlich) (3 Punkte)

Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und in $x \in \mathbb{R}^n$ sei die Hesse-Matrix regulär. Mit $d_N \in \mathbb{R}^n$ sei die Newton-Richtung bezeichnet, d.h. $D^2 f(x) d_N = -\nabla f(x)$, und für eine beliebige symmetrisch, positiv definite Matrix $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei mit $d_S = -H\nabla f(x)$ eine weitere Richtung gegeben. Betrachten Sie folgende Modifikation von Algorithmus (2.1)

S3) Bestimme $t = \max\limits_{l\geq 0} \beta^l$ mit

$$f\big(x + t((1-t)d_S + td_N)\big) \leq f(x) + t\sigma \nabla f(x)^T \big((1-t)d_S + td_N\big)$$

wobei $\beta \in (0,1)$, $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ fest vorgegeben sind.

Zeigen Sie, dass die obige Schrittweitenregel S3) wohldefiniert ist.

Aufgabe 11 (mündlich)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, x^* ein stationärer Punkt von f und die Hesse-Matrix $D^2 f(x^*)$ sei regulär. Ferner sei $D^2 f$ in einer Umgebung U von x^* Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$, d.h. es existiert ein $\kappa > 0$, so dass für alle $x, y \in U$ gilt:

$$\|D^2 f(x) - D^2 f(y)\| \leq \kappa \|x - y\|^\alpha\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für $x^0 \in B(x^*, \varepsilon)$ das Newton-Verfahren wohldefiniert ist und eine Folge $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ erzeugt, die gegen x^* konvergiert.

(b) Es gibt ein $C > 0$ mit $\|x^{k+1} - x^*\| \leq C\,\|x^k - x^*\|^{1+\alpha}$.

Hinweis: Falls $D^2 f(x^*)$ regulär ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in B(x^*, \delta)$, $D^2 f(x)$ ebenfalls regulär ist. Zudem existiert ein $c > 0$ mit $\|D^2 f(x)^{-1}\| \leq c$ für alle $x \in B(x^*, \delta)$.

Aufgabe 12 (mündlich)

Implementieren Sie das Newton-Verfahren gemäß Algorithmus (2.1) der Vorlesung sowie die Modifikation aus Aufgabe 10. Als Vorlage können Sie das Programm aus Aufgabe 8 benutzen. Dieses wird auf der Homepage der Vorlesung (s.u.) bereitgestellt. Testen Sie das Programm auch mit folgendem Beispiel:

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Die Funktion besitzt ein eindeutiges Minimum bei $x^* = (1, 1)$ mit $f(x^*) = 0$. Vergleichen Sie die Konvergenz des Gradientenverfahrens und des Newton-Verfahrens. Benutzen Sie als Startwert $x^0 = (-1.9, 2)$.

Hinweis: Die obige Funktion f geht zurück auf Rosenbrock und wird gelegentlich auch "Bananen-Funktion" genannt. In Matlab können Sie mit dem Befehl `bandem` eine kleine Demonstration verschiedener Optimierungsroutinen für die Rosenbrock Funktion starten.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Mittwoch, den 14. November 2007, 15.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.

Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:

Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr

Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung