Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 4

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 13 (schriftlich – 4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine reguläre und symmetrische Matrix. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x, \lambda) = \frac{1}{2}\big(x^T(A - \lambda I)x + \lambda\big)$. Sei $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ein stationärer Punkt von f.

(a) Zeigen Sie, dass x^* ein normierter Eigenvektor von A zum Eigenwert λ^* ist.

(b) Zeigen Sie, dass falls (x^k, λ^k) kein stationärer Punkt von f ist, die Newton-Richtung $d^k \in \mathbb{R}^{n+1}$ bestimmt werden kann, d.h. $D^2(x^k, \lambda^k)$ ist regulär.

(c) Unter welchen Voraussetzungen ist die Hesse-Matrix in einem stationären Punkt (x^*, λ^*) regulär?

Aufgabe 14 *(Gauß-Newton-Verfahren)* (schriftlich – 4 Punkte)

Es sei $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit $m \geq n$ sowie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}\|g(x)\|_2^2$. Betrachten Sie die Minimierungsaufgabe

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n.$$

(a) Geben Sie die quadratische Taylor-Entwicklung von f für allgemeines g sowie für den affinen Spezialfall an, d.h. $g(x) = Ax - b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

(b) Formulieren Sie ausgehend von (a) das Newton-Verfahren für (P).

Welche Schwierigkeiten können Ihrer Meinung nach bei der Durchführung des Newton-Verfahrens auftreten?

Aufgabe 15 (mündlich)

Gegeben sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und es gebe $\lambda_c \geq 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgende Abschätzung gilt: $d^T D^2 f(x) d \geq -\lambda_c \|d\|_2^2$. Wir betrachten wieder die Minimierungsaufgabe:

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n,$$

und $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei die quadratische Taylor-Entwicklung von $f(x + d)$, d.h. $q(d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T D^2 f(x) d$. Zeigen Sie für festes $x \in \mathbb{R}^n$:

(a) Es gibt ein $\lambda \geq 0$, so dass $d \in \mathbb{R}^n$ eine Abstiegsrichtung ist, wobei d charakterisiert ist durch

$$(D^2 f(x) + \lambda I)d = -\nabla f(x).$$

(b) Eine weitere Charakterisierung für das in (a) bestimmte d ist

$$d = \arg \min_{\|\hat{d}\|_2 \leq \|d\|_2} q(\hat{d})$$

Hinweis zur Notation: Zu einem Problem $\min_{x \in S} g(s)$, wobei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, bezeichnet $\arg\min_{x \in S} g(s)$ die Menge aller Argumente von g, an denen das Minimum angenommen wird, d.h.

$$\arg\min_{x \in S} g(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : g(x^*) \leq g(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in S\}$$

Falls die Menge $\arg\min_{x \in S} g(x)$ nur aus einem Element x^* besteht, schreibt man auch $x^* = \arg\min_{x \in S} g(x)$.

Aufgabe 16 *(Quasi-Newton Rank-One Update)* (mündlich)

Es seien $y, s \in \mathbb{R}^n$, sowie eine symmetrische, positiv definite Matrix $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben. Es gelte $s^T(y - Hs) \neq 0$. Bestimmen Sie $\gamma \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}^n$ so, dass es eine Matrix $H_+ \in \mathbb{R}^{n,n}$ der Form $H_+ = H + \gamma u u^T$ gibt, die die Quasi-Newton Gleichung (oder auch Sekantengleichung) $H_+ s = y$ erfüllt. Überprüfen Sie außerdem, ob die so erhaltene Matrix H_+ symmetrisch, positiv definit ist.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Mittwoch, den 21. November 2007, 15.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:

Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung