Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 6

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 21 (Polak-Ribière) (schriftlich – 4 Punkte)

Für $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$ gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung die Formel $\nabla f(x^{k+1}) = \nabla f(x^k) + t_k A_k d^k$, wobei die Matrix $A_k \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben ist durch $A_k = \int_0^1 D^2 f(x^k + s t_k d^k)\, ds$. Das nichtlineare CG-Verfahren aus der Vorlesung sei so modifiziert, dass β_k in S3) gegeben ist durch

$$\beta_k^{PR} = \frac{\big(\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)\big)^T \nabla f(x^{k+1})}{\|\nabla f(x^k)\|^2}\,.$$

Zudem sei die Schrittweitensteuerung in S2) exakt, d.h. es gilt stets

$$\nabla f(x^{k+1})^T d^k = \nabla f(x^k + t_k d^k)^T d^k = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass dann $(d^k)^T A_k d^{k+1} = 0$ gilt.

Aufgabe 22 (CGNR) (mündlich)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie folgenden Algorithmus:
S0) Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \geq 0$, und setze $r^0 = b - Ax^0$, $z^0 = A^T r^0$, $d^0 = z^0$ und $k := 0$.
S1) Ist $\|z^k\| \leq \varepsilon$: STOPP
S2) Bestimme

$$\begin{aligned}
w^k &= Ad^k \\
t_k &= \frac{\|z^k\|^2}{\|w^i\|^2} \\
x^{k+1} &= x^k + t_k d^k \\
r^{k+1} &= r^k - t_k w^k \\
z^{k+1} &= A^T r^{k+1} \\
\beta_k &= \frac{\|z^{k+1}\|^2}{\|z^k\|^2} \\
d^{k+1} &= z^{k+1} + \beta_k d^k
\end{aligned}$$

S3) Setze $k := k + 1$ und gehe zu S1)

Zeigen Sie, dass obiger Algorithmus die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ findet. Betrachten Sie dazu das CG-Verfahren zur Minimierung von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} x^T A^T A x - x^T A^T b$.

Inwieweit lässt sich der Algorithmus für allgemeines $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m > n$ verallgemeinern?

Aufgabe 23 (Myers-Modifikation) (mündlich)

Wir betrachten das CG-Verfahren von mit der Modifikation (von Myers):

S3) Setze

$$\beta_k^M = -\frac{\|\nabla f(x^{k+1})\|^2}{\nabla f(x^k)^T d^k}\,.$$

Zeigen Sie: Ist f stetig differenzierbar und nach unten beschränkt und gilt für die Iterierten x^k stets $\nabla f(x^k) \neq 0$, so ist das Verfahren wohldefiniert; insbesondere gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\nabla f(x^k)^T d^k < 0\,.$$

Aufgabe 24 (mündlich)

Erweitern Sie das Programm `generalgradientmethod` (siehe Homepage) um eine Routine für das CG-Verfahren nach Fletcher-Reeves (siehe Vorlesung) und nach Polak-Ribière (siehe Aufgabe 21). Schreiben Sie dazu auch eine Implementierung der (strengen) Wolfe-Powell Schrittweitensteuerung.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Mittwoch, den 05. Dezember 2007, 15.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:

Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung