Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 7

Wintersemester 2007/2008

Aufgabe 25 (schriftlich – 4 Punkte)

Zu $g \in \mathbb{R}^n$ und symmetrischer Matrix $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei für $\Delta > 0$ das folgende Trust-Region Teilproblem gegeben:

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad q(d) := g^T d + \frac{1}{2} d^T H d \quad \text{unter} \quad \|d\|_\infty \leq \Delta\,,$$

wobei $\|d\|_\infty = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |d_i|$. Die Lösung von (P) sei mit d^* bezeichnet. Zeigen Sie für $j \in \{1, \dots, n\}$:

(a) Ist $|d_j^*| < \Delta$, so gilt $(g + Hd^*)_j = 0\,.$

(b) Ist $d_j^* = \Delta$, so ist $(g + Hd^*)_j \leq 0\,.$

(c) Ist $d_j^* = -\Delta$, so ist $(g + Hd^*)_j \geq 0\,.$

Aufgabe 26 (mündlich)

Sei $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ bezeichne den kleinsten Eigenwert von H. Zeigen Sie, dass für $g \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Funktion $\psi : (-\lambda_1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda) = \|(H + \lambda I)^{-1} g\|_2$$

auf $(-\lambda_1, \infty)$ monoton fallend und konvex ist.

Aufgabe 27 (schriftlich – 3 Punkte)

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrisch und positiv definite Matrix und $x^0 \in \mathbb{R}^n$ sei fest vorgegeben. Betrachte Sie zu $\Delta > 0$ das lineare Trust-Region Teilproblem

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \qquad \nabla f(x^0)^T d \qquad \text{unter} \qquad \|d\|_Q \leq \Delta\,.$$

Hierbei ist wieder $\|d\|_Q = \sqrt{d^T Q d}$. Zeigen Sie, dass (P) eindeutig durch ein d^* lösbar ist, und berechnen Sie d^* in Abhängigkeit von x^0.

Aufgabe 28 (mündlich)

Zu $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sei das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \qquad f(x) = \|g(x)\|_2\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,,$$

gegeben. Weiter sei zu $\Delta > 0$ und $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und positiv definit, $d^* \in \mathbb{R}^n$ das globale Minimum des Problems

$$(P_{\Delta,x}) \qquad \text{Minimiere} \qquad q_{\Delta,x}(d) = \|g(x) + Dg(x)d\|_2 \qquad \text{unter} \qquad \|d\|_2 \leq \Delta\,,$$

und mit $q_{\Delta,x} \in \mathbb{R}$ sei der Optimalwert von $(P_{\Delta,x})$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) x^* ist genau dann eine stationäre Lösung von (P), falls $f(x^*) = q_{\Delta,x^*}(d^*)$.

(b) Für $\Delta^* > 0$ gilt:

$$f(x^*) - q_{\Delta,x^*} \geq \frac{\Delta}{\Delta^*}\big(f(x^*) - q_{\Delta^*,x^*}\big) \qquad \text{für alle } \Delta \in (0, \Delta^*]\,.$$

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Mittwoch, den 12. Dezember 2007, 15.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:

Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung