Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 8

Wintersemester 2007/2008

Notation: In allen Aufgaben ist $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Die zueinander dualen Programme der linearen Optimierung seien mit

$$\begin{array}{llll} (P) & \text{Minimiere} & c^T x & \text{auf} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}\,, \\ (D) & \text{Maximiere} & b^T y & \text{auf} \quad N = \{(y,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : A^T y + z = c, z \geq 0\}\,. \end{array}$$

bezeichnet.

Aufgabe 29 (schriftlich – 3 Punkte)

$P_0 : \mathbb{R}^n \to \ker(A)$ sei die Orthogonalprojektion auf den Kern von A. Das Problem (D) sei lösbar, und es gebe ein $\hat{x} \in M$.

Zeigen Sie, dass (D) äquivalent ist zu

$$\text{Minimiere} \quad \hat{x}^T z \qquad \text{unter} \quad P_0 z = P_0 c, \quad z \geq 0\,.$$

Hinweis: Die Orthogonalprojektion auf den Kern der Matrix A ist charakterisiert durch $z^T(x - P_0(x)) = 0$ für alle $z \in \ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Eine weitere Charakterisierung lautet: Zu $x \in \mathbb{R}^n$ ist $P_0(x)$ die Lösung des Minimierungsproblem

$$\text{Minimiere} \quad \|\widehat{x} - x\| \qquad \text{unter} \quad A\widehat{x} = 0\,.$$

Aufgabe 30 (schriftlich – 4 Punkte)

Die Menge $\widehat{N} = \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y \leq c\}$ sei beschränkt und das Innere $\mathrm{int}(\widehat{N}) \subset \widehat{N}$ sei nicht leer. Die Funktion $\phi : \mathrm{int}(\widehat{N}) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\phi(y) = -\sum_{i=1}^{n} \ln(c_i - a_{*i}^T y)\,,$$

wobei a_{*i} die i-te Spalte von A bezeichne.

Zeigen Sie:

(a) ϕ ist strikt konvex.

(b) Zu $\hat{y} \in \partial\widehat{N}$ gebe es eine Folge $\{y^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{int}(\widehat{N})$ mit $y^k \to \hat{y}$ für $k \to \infty$. Dann gilt: $\lim_{k\to\infty} \phi(y^k) = \infty$.

Aufgabe 31 (Strikte Komplementarität) (mündlich)

Die Probleme (P) und (D) seien beide zulässig und $M_{\text{opt}} \subset M$ und $N_{\text{opt}} \subset N$ bezeichnen die jeweiligen Lösungsmengen. Zeigen Sie: Es gibt ein $(x^*, y^*, z^*) \in M^* \times N^*$ mit $x^* + z^* > 0$.

Aufgabe 32 (mündlich)

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $g(x,y,z) = x^T z$. Zudem sei die Menge $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : Ax = b,\ A^T y + z = c,\ z \geq 0,\ x \geq 0\}\,.$$

Betrachten Sie das Problem

$$(CP) \quad \text{Minimiere} \quad g(x,y,z) \qquad \text{auf} \quad \mathcal{F}\,,$$

und zeigen Sie:

(a) Falls (CP) zulässig ist, so besitzt (CP) auch eine Lösung $(x^*, y^*, z^*) \in \mathcal{F}$.

(b) Für die Lösung aus (a) gilt $g(x^*, y^*, z^*) = 0$ und x^* ist Lösung von (P) und (y^*, z^*) ist Lösung von (D).

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Mittwoch, den 19. Dezember 2007, 15.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:

Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung