Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825 | **Institut für Angewandte und Numerische Mathematik**

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie II — Übungsblatt 9

Wintersemester 2007/2008

Notation: In allen Aufgaben ist $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Die zueinander dualen Programme der linearen Optimierung seien mit

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad c^T x \qquad \text{auf} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}\,,$$
$$(D) \quad \text{Maximiere} \quad b^T y \qquad \text{auf} \quad N = \{(y,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : A^T y + z = c, z \geq 0\}\,.$$

bezeichnet und wir verwenden $\mathbb{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n,n} : X = X^T\}$ und $\mathbb{S}^n_{++} = \{X \in \mathbb{S}^n : X \text{ ist positiv definit}\}$.

Aufgabe 33 (schriftlich – 4 Punkte)

Zu einer positiv semidefiniten Matrix $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ mit $M_{11} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $M_{12} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $M_{21} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $M_{22} \in \mathbb{R}^{m,m}$, und Vektoren $q^1 \in \mathbb{R}^n$ und $q^2 \in \mathbb{R}^m$ sei das gemischte lineares Komplementaritätsproblem $(mLCP)$ gegeben: Finde $x, z \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}, \qquad (x,z) \geq 0, \qquad x^T z = 0\,,$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Optimalitätsbedingung für die linearen Programme (P) und (D) ein gemischtes lineares Komplementaritätsproblem bilden. Diskutieren Sie auch, ob für die Optimalitätsbedingungen der quadratischen und konvexen Optimierungsaufgabe

$$(QP) \quad \text{Minimiere} \quad \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \qquad \text{auf} \quad M\,,$$

eine äquivalente Formulierung als $(mLCP)$ möglich ist.

Diese ist ebenfalls positiv semidefinit.

Aufgabe 34 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(X) = -\lambda_{\min}(X)$, wobei $\lambda_{\min}(X) = \min_{\|z\|=1} z^T X z$, den kleinsten Eigenwert von X bezeichnet. Sei nun $X \in \mathbb{S}^n$ beliebig aber fest. Zeigen Sie, dass f in X nicht Fréchet-differenzierbar ist, die Richtungsableitung $Df(X;Y)$ aber für alle $Y \in \mathbb{S}^n$ existiert.

Hinweis: Zu einer Funktion $f : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ ist $Df(X) \in \mathbb{R}^{n,n}$ komponentenweise definiert durch $(Df(X))_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_{ik}} f(X)$, wobei $X = (x_{ik})_{ik}$ und jeweils $i, k = 1, ..., n$.

Eine Funktion $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ heißt Fréchet-differenzierbar in X falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ gibt so dass für alle $Y \in \mathbb{S}^n$

$$\lim_{\|Y\| \to 0} \frac{1}{\|Y\|} \|f(X+Y) - (f(X) + A(X) : Y)\| = 0\,,$$

und dann ist $Df(X) = A(X)$. Die Richtungsableitung von f in X nach Y ist definiert als

$$Df(X;Y) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\big(f(X+tY) - f(X)\big)\,.$$

Aufgabe 35 (mündlich)

Betrachten Sie die Determinanten-Funktion $\det : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\det$ überall differenzierbar ist und für reguläres X gilt: $D\det(X) = \det(X) X^{-1}$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{S}^n_{++} \to \mathbb{R}$, $f(X) = \log(\det(X))$.

Hinweis: Benutzen Sie die Cramer'sche Regel bzw. den Entwicklungssatz von Laplace für die Determinante. Beachten Sie auch den Hinweis zu Aufgabe 34.

Frohe Weihnachten

und eine schönes neues Jahr.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Mittwoch, den 9. Januar 2008, 15.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:

Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung