Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie I — Übungsblatt 1

Sommersemester 2008

Aufgabe 1 (Diät-Problem) (mündlich)
Aufgrund der gestiegenen Lebenskosten will die Familie Hunger künftig beim Esseneinkauf sparen, sich aber trotzdem gesund ernähren. Dazu macht sie sich eine Liste von m Nährstoffen, die täglich in einer gewissen Menge benötigt werden, sowie eine Liste von n gesunden Nahrungsmitteln, die sie in Zukunft essen möchte. Zudem informiert sich die Familie bei der Ernährungsberatung wieviel des Nährstoffes $j \in \{1, ..., m\}$ in Nahrungsmittel $i \in \{1, ..., n\}$ enthalten ist. Da die Preise der einzelnen Nahrungsmittel ebenfalls bekannt sind, versucht Familie Hunger so günstig wie möglich die Menge der einzelnen Nahrungsmittels einzukaufen, die gewährleisten, dasss der tägliche Mindestbedarf der einzelnen Nährstoffe gedeckt ist.

Helfen Sie Familie Hunger ihre Kosten zu minimieren, indem Sie obiges Problem als ein lineares Optimierungsproblem formulieren.

Aufgabe 2 (mündlich)
Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem

Minimiere $(d^1)^T x^2 + (d^2)^T x^2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{l} M_{11}\, x^1 + M_{12}\, x^2 \geq r^1 \\ M_{21}\, x^1 + M_{22}\, x^2 = r^2, \end{array} \quad x^1 \geq 0,$$

Dabei seien $x^1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $r^1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $r^2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, wobei $n_1, n_2, m_1, m_2 \geq 0$, und die Matrizen M_{ij} und Vektoren d^i seien passend dimensioniert. Bringen Sie obiges Problem in die Standardformen

(a) (P_1) Minimiere $c^T x$ unter $Ax \leq b$,

(b) (P_2) Minimiere $c^T x$ unter $Ax = b,\ x \geq 0$,

und geben Sie jeweils die Matrix A sowie die Vektoren c, b und x an.

Aufgabe 3 (mündlich)
Betrachten Sie das Optimierungsproblem

(P) Maximiere $f(x_1, x_2)$ unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 \leq 1, \quad -x_1 + 2x_2 \leq 2, \quad x_1 \geq -1, \quad -x_1 + 3x_2 \geq -3.$$

(a) Zeichnen Sie die zulässige Menge von (P).

(b) Zeichnen Sie die Höhenlinien für $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ und lösen Sie das Problem grafisch.

(c) Zeichnen Sie die Höhenlinien für $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 + \frac{1}{2})^2$ und lösen dieses Problem ebenfalls grafisch.

(d) Geben Sie eine lineare Zielfunktion an, so dass (P) lösbar ist, es aber keine eindeutige Lösung gibt. Überlegen Sie sich, wie die Lösungsmenge von allgemeinen linearen Problemen aussehen kann.

Aufgabe 4 Konstruieren Sie eine lineares Problem der Form

(P_2) Minimiere $c^T x$ unter $Ax \leq b$,

in $\mathbb{R}^2$, d.h. $c \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m,2}$ mit $m \geq 0$, so dass

(a) (P_2) keinen zulässigen Punkt besitzt (d.h. es gibt kein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $Ax \leq b$),

(b) (P_2) genau einen zulässigen Punkt besitzt,

(c) (P_2) zulässig ist, aber $\inf(P_2) = -\infty$ gilt.

Übungsbetrieb:
Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/opti222007w/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt. Zur Teilnahme am Übungsbetrieb muss man sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-12.00 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Do. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung

Vordiploms-/Studienbegleitende Klausur:
Diese findet am Montag, den 8. September von 9.00-11.00 Uhr im HMU statt.

Scheinkriterien:
Neben dem erfolgreichen Bestehen der Übungsklausur, müssen zum Erhalt eines Übungsscheins mindestens 50% der möglichen Punkte in den schriftlichen Aufgaben erreicht werden. Die schriftlichen Aufgaben sind handschriftlich und einzeln abzugegeben. Die Scheinklausur wird wahrscheinlich in der ersten Woche nach Vorlesungsende stattfinden.