Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie I — Übungsblatt 10

Sommersemester 2008

Aufgabe 37 (schriftlich – 3 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : D \to \mathbb{R}$. Der Epigraph zu f ist definiert als

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in D \times \mathbb{R} : f(x) \le \alpha\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn $\mathrm{epi}(f)$ konvex ist.

(b) Sei S eine beliebige Menge und $\{f_\alpha\}_{\alpha\in S}$ sei eine Familie von konvexen Funktion auf D, d.h. $f_\alpha : D \to \mathbb{R}$ ist konvex für alle $\alpha \in S$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \sup_{\alpha\in S} f_\alpha(x)$$

dann ebenfalls konvex ist.

Hinweis für (b): Benutzen Sie das der Schnitt von konvexen Mengen selbst wieder konvex ist.

Aufgabe 38 (schriftlich – 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ konvexe Funktionen sind.

(b) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische Matrix und betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^T Ax$. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, falls A positiv semidefinit ist. Untersuchen Sie auch, in welchem Fall f gleichmäßig konvex ist, und bestimmen Sie in diesem Fall c_0 möglichst genau.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \mathrm{sign}(x)x^3e^x$ auf $D = (0, 1)$ konvex aber nicht strikt konvex ist. Dabei ist $\mathrm{sign}(x)$ die Signumsfunktions, d.h.

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & , x \ne 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 39 (schriftlich – 5 Punkte)

Betrachten Sie zu einer konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und der konvexen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die konvexe Optimierungsaufgabe

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{unter} \qquad x \in K\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge $\{x \in K : f(x) \le f(y) \text{ für alle } y \in K\}$ von (P) konvex ist.

(b) Sei f nun zusätzlich differenzierbar. Dann ist $x^* \in K$ genau dann Lösung von (P), falls

$$Df(x^*)(x - x^*) \ge 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in K\,,$$

gilt.

(c) Sei $z \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber fest. Zeigen Sie mithilfe von (b) die Charakterisierung

$$(z - x^*)^T(x - x^*) \le 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in K\,,$$

der Projektion von z auf die Menge K. Betrachten Sie dazu die Optimierungsaufgabe

$$\text{Minimiere} \quad \|x - z\|^2 \qquad \text{unter} \qquad x \in K\,.$$

Aufgabe 40 (mündlich)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei konvex und zusätzlich seien $C \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $d \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(Cx + d)$ ist konvex.

(b) Falls f sogar strikt konvex ist und $m > n$ gilt, ist $g(x) = f(Cx + d)$ nicht strikt konvex.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Freitag, den 20. Juni 2008, 12.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage: http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/optim12008s/

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-11.30 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung