Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

**Institut für Angewandte und Numerische Mathematik**

**Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter**

## Optimierungstheorie I — Übungsblatt 11

Sommersemester 2008

**Aufgabe 41** (schriftlich – 3 Punkte)
Formulieren Sie zu der konvexen Optimierungsaufgabe

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad x_1^2 - x_2 \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \le 1\},$$

das duale Problem, und lösen Sie die beiden Probleme.

**Aufgabe 42** (schriftlich – 5 Punkte)
Betrachten Sie zu einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$, sowie $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ die beiden quadratischen Optimierungsaufgaben

$$(P_1) \quad \text{Min.} \quad \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\},$$

$$(P_2) \quad \text{Min.} \quad \frac{1}{2}y^TAQ^{-1}A^Ty + (b + AQ^{-1}c)^Ty \quad \text{auf} \quad N := \{y \in \mathbb{R}^m : y \ge 0\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $(P_1)$ ist eindeutig durch ein $x^* \in M$ lösbar, falls $M$ nicht leer ist.

(b) Das quadratische Programm $(P_2)$ ist äquivalent zum dualen Programm von $(P_1)$. Stellen Sie dazu das duale Problem von $(P_1)$ auf.

**Aufgabe 43** (schriftlich – 3 Punkte)
Gegeben seien konvexe Teilmengen $D \subset \mathbb{R}^n$ und $K \subset \mathbb{R}^k$, sowie eine konvexe Funktion $\Phi : D \times K \to \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \inf_{z \in K} \Phi(x, z).$$

Zeigen Sie, dass $f$ konvex ist. Betrachten Sie dazu Punkte $\widehat{x}, \tilde{x} \in D$ und Folgen $\{\widehat{z}^k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\tilde{z}^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $\Phi(\widehat{x}, \widehat{z}^k) \to f(\widehat{x})$ bzw. $\Phi(\tilde{x}, \tilde{z}^k) \to f(\tilde{x})$ für $k \to \infty$.

**Aufgabe 44** (mündlich)
Zu einer beliebigen, nicht leeren Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \partial_{\text{rel}}(K)$ und $a \in \mathbb{R}^n$, $a \ne 0$ heißt die Hyperebene $H = \{z \in \mathbb{R}^n : a^Tx = a^Tz\}$ eine Stützhyperebene zu $K$ in $x$, falls $a^Tx \le a^Tz$ für alle $z \in K$ gilt.

Zeigen Sie, dass falls $K$ zusätzlich konvex ist, es zu jedem $x \in \partial_{\text{rel}}(K)$ eine Stützhyperebene gibt. Betrachten Sie dazu eine Folge $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \not\subset K$ mit $x^k \to x$ und verwenden Sie den Trennungssatz (2.8) der Vorlesung.

**Aufgabe 45** (mündlich)
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f : K \to \mathbb{R}$, $g : K \to \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Die Lagrange-Funktion $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist definiert ist als

$$L(x, u, v) = f(x) + u^Tg(x) + v^T(Ax - b).$$

Weiterhin sei $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(u, v) = \inf_{x\in K} L(x, u, v)$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $F(u, v)$ ist konkav (d.h. $-F(u, v)$ ist konvex).

(b) Seien nun $f$ und $g$ zusätzlich konvex. Dann gilt: Die Lagrange-Funktion ist konvex in ihrem ersten Argument.

---

**Abgabe:**
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Freitag, den 27. Juni 2008, 12.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

**Homepage:** http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/optim12008s/

**Sprechstunden:**
Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-11.30 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung