Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie I — Übungsblatt 12

Sommersemester 2008

Aufgabe 46 (schriftlich – 3 Punkte)

Gegeben sei das konvexe Optimierungsproblem (P) sowie sein duales (D)

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0,\ Ax = b\}\,,$$
$$(D) \quad \text{Maximiere} \quad F(u,v) \quad \text{auf} \quad N := \{(u,v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m : u \geq 0, F(u,v) > -\infty\}\,,$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ konvex, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zudem sei die Lagrange-Funktion $L(x,u,v) = f(x) + u^T g(x) + v^T(Ax - b)$ gegeben und die Zielfunktion F des dualen Problems ist $F(u,v) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x,u,v)$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Ungleichung immer gilt:

$$\sup_{(u,v)\in N} \inf_{x \in M} L(x,u,v) \leq \inf_{x\in M} \sup_{(u,v)\in N} L(x,u,v)$$

(b) Sei nun (x^*, u^*, v^*) ein Sattelpunkt der Lagrangefunktion. Zeigen Sie, dass dann in obiger Ungleichung sogar Gleichheit gilt.

Aufgabe 47 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie zu der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdots x_n$ das Optimierungsproblem

$$\text{Maximiere} \qquad f(x) \qquad \text{unter} \quad x \geq 0,\ \|x\| \leq 1\,.$$

Lösen Sie die Maximierungsaufgabe, indem Sie mögliche Karush-Kuhn-Tucker (KKT) Punkte bestimmen.

Aufgabe 48 (schriftlich – 4 Punkte)

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrisch und positiv definite Matrix und $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ sei fest vorgegeben. Betrachte Sie zu $\Delta > 0$ das Problem

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \qquad c^T x \qquad \text{unter} \qquad \|x\|_Q \leq \Delta\,.$$

Hierbei ist $\|x\|_Q = \sqrt{x^T Q x}$. Zeigen Sie, dass (P) eindeutig lösbar ist, und berechnen Sie die Lösung in Abhängigkeit von c.

Aufgabe 49 (mündlich)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, sowie $f : D \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig. Die Richtungsableitung von f in x in Richtung $d \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$Df(x;d) := \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\big(f(x+td) - f(x)\big)\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Richtungsableitung von f existiert für alle $x \in D$ und $d \in \mathbb{R}^n$.

(b) Sei nun f konvex. Dann ist für festes $x \in D$ die Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(d) = Df(x;d)$ konvex und zudem gilt $g(\lambda d) = \lambda g(d)$ für alle $\lambda \geq 0$.

Aufgabe 50 (mündlich)

Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und nicht leer, und die Abbildung $g : K \to \mathbb{R}^p$ sei komponentenweise konvex. Zeigen Sie, dass dann folgende Alternative gilt:

(i) Es existiert ein $\widehat{x} \in K$ mit $g(\widehat{x}) < 0$.

(ii) Es existiert ein $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, $u \geq 0$, so dass $\inf_{x \in K} u^T g(x) \geq 0$.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Freitag, den 4. Juli 2008, 12.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage: http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/optim12008s/

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-11.30 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung