Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie I — Übungsblatt 13

Sommersemester 2008

Aufgabe 51 (schriftlich – 4 Punkte)

Die Funktionen $f, h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch $f(x) = x_1 + x_2 \sin\alpha$, $h_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1$ und $h_2(x) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1$. Dabei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Betrachten Sie die differenzierbare Optimierungsaufgabe

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) = 0\},$$

wobei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch $h(x) = (h_1(x), h_2(x))^T$.

(a) Zeichnen Sie die Niveaulinien von h_i $(i = 1, 2)$ und bestimmen Sie damit die zulässige Menge M, sowie die Lösung x^* von (P).

(b) Zeigen Sie, dass für x^* die Bedingung (CQ1) nicht gilt.

(c) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für die ein $v^* \in \mathbb{R}^2$ existiert, so dass $\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{2} v_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$ gilt.

Aufgabe 52 (schriftlich – 4 Punkte)

Gegeben sei die Optimierungsaufgabe

$$\text{Minimiere} \quad -x_1 - x_2 \qquad \text{unter} \quad -x_1^2 + x_2 \le 0\,,\ -x_1^2 - x_2 + 1 = 0\,.$$

(a) Zeichnen Sie die zulässige Menge und die Höhenlinien von f.

(b) Bestimmen Sie alle möglichen KKT-Punkte (x^*, u^*, v^*) und überprüfen Sie, ob die x^* der (CQ1) Bedingung genügen.

(c) Bestimmen Sie anhand der Skizze die Lösung und geben Sie eine grafische Interpretation der Bedingung $\nabla f(x^*) + Dg(x^*)^T u^* + Dh(x^*)^T v^* = 0$. Zeichnen Sie diese ebenfalls ein.

Aufgabe 53 (schriftlich – 4 Punkte)

Es seien $p \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbare Funktionen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., p$ gegeben. Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad \max_{1 \le i \le p} g_i(x) \qquad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n\,.$$

Zeigen Sie, dass zu einem optimalen $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor $u^* \in \mathbb{R}^p$ existiert mit

$$\sum_{i=1}^{p} u_i^* \nabla g_i(x^*) = 0\,, \qquad u^* \ge 0, \qquad \sum_{i=1}^{p} u_i^* = 1, \qquad \text{und}$$
$$u_i^* = 0 \quad \text{falls} \quad g_i(x^*) < \max_{1 \le k \le p} g_k(x^*)\,.$$

Hinweis: Führen Sie eine Hilfsvariable ein und versuchen Sie diese anschließend zu minimieren.

Aufgabe 54 (mündlich)

Betrachten Sie die nichtlineare Optimierungsaufgabe

$$(P_a) \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \qquad \text{unter} \quad h(x) = a\,,$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}^m$. Dabei seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar. Für $a = 0$ habe (P_a) eine Lösung x^* mit zugehörigem Lagrange-Multiplikator v^* und x^* erfülle die (CQ2) Bedingung. Zudem gelte $y^T D_x^2 L(x^*, v^*) y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $Dh(x^*)y = 0$, d.h. $D_x^2 L(x^*, y^*)$ ist auf dem Kern der Jacobi-Matrix von h in x^* positiv definit. Betrachten Sie außerdem die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, gegeben durch $\Phi_a(x, v) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + Dh(x)^T v \\ h(x) - a \end{bmatrix}$. Zeigen Sie:

(a) Die Jacobi-Matrix von Φ_a ist regulär in (x^*, v^*).

(b) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle a in der offene Kugel $S = \{\hat{a} \in \mathbb{R}^m : \|\hat{a}\| < \varepsilon\}$ ein $x(a) \in \mathbb{R}^n$ und ein $v(a) \in \mathbb{R}^m$ gibt mit den Eigenschaften: $x(a)$ ist Lösung von (P_a) mit zugehörigem Lagrange-Multiplikator $v(a)$ und es gilt $x(0) = x^*$ sowie $v(0) = v^*$. *Hinweis:* Benutzen Sie den Satz über implizite Funktionen.

(c) Für die primale Kostenfunktion $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $P(a) = f(x(a))$ gilt: $\nabla P(a) = -v(a)$.

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Freitag, den 11. Juli 2008, 12.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage: http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/optim12008s/

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-11.30 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung