



## Optimierungstheorie I

Sommersemester 2008

## Übungsblatt 14

### Aufgabe 55

(5 Punkte)

Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) = x_1^2 x_2$ , sowie das Optimierungsproblem

$$(P) \quad \text{Minimiere } f(x) \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2^2 - 4 = 0\}.$$

- Bestimmen Sie alle KKT-Punkte von (P).
- Zeigen Sie mit Hilfe der notwendigen Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung, dass  $x^* = (0, -2)$  kein lokales Minimum von  $f$  auf  $M$  ist.
- Zeigen Sie mit Hilfe der hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung, dass  $x^* = (0, 2)$  ein lokales Minimum von  $f$  auf  $M$  ist.

### Aufgabe 56

(schriftlich – 3 Punkte)

Betrachten Sie nochmals die Optimierungsaufgabe aus Aufgabe 52 (Übungsblatt 13):

$$(P) \quad \text{Minimiere } -x_1 - x_2 \quad \text{unter} \quad -x_1^2 + x_2 \leq 0, \quad -x_1^2 - x_2 + 1 = 0.$$

Der Punkt  $(x^*, u^*, v^*) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{-2-\sqrt{2}}{4}\right)$  ist ein KKT-Punkt von (P). Zeigen Sie, dass  $x^*$  der hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung genügt.

### Aufgabe 57

(mündlich)

Zu  $a \in \mathbb{R}$  sei folgendes Optimierungsproblem gegeben:

$$(P_a) \quad \text{Minimiere } -(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \quad \text{unter} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3 + a.$$

- Bestimmen Sie die KKT-Punkte  $(x^*(a), v^*(a))$  von  $(P_a)$  in Abhängigkeit von  $a$ .
- Benutzen Sie die hinreichenden Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung und zeigen Sie, dass  $x^*(a) = \left(1 + \frac{a}{3}\right)e$  ein strikt lokales Minimum von  $(P_a)$  ist (dabei ist wieder  $e = (1, \dots, 1)$ ).
- Benutzen Sie Aufgabe 54 und zeigen Sie:  $\nabla P(a) = -v^*(a)$ . Dabei ist wieder  $P(a) = f(x^*(a))$  wie die primale Kostenfunktion.

### Aufgabe 58 (Parameterschätzung)

(mündlich)

An einem heißen Sommertag bestellt sich Fritzchen Müller ein kühles Bier. Nachdem es serviert wurde, betrachtet er aufmerksam den Zerfall des Bierschaumes. Deshalb notiert es sich zu den Zeitpunkten  $0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$  die Höhe des Bierschaumes  $y_1, \dots, y_m$ . Fritzchen vermutet, dass die Schaumhöhe exponentiell abnimmt und sich die Schaumhöhe  $y(t)$  deshalb näherungsweise durch die Lösung der linearen Differentialgleichung  $y'(t) = ay(t)$  mit Anfangswert  $y(0) = b$  beschreiben lassen, wobei  $t \in [0, T]$ ,  $a \leq 0$  die Zerfallsrate und  $b \geq 0$  die Schaumhöhe zum Zeitpunkt des Zapfens sein soll. Um die Parameter  $a, b$  aus seinen Messungen zu bestimmen, versucht Fritzchen die Summe der Fehlerquadrate zu minimieren und betrachtet die Optimierungsaufgabe

$$(P) \quad \text{Minimiere} \quad \sum_{i=1}^m (y(t_i) - y_i)^2 \quad \text{mit} \quad y'(t) = ay(t), \quad a \leq 0, \quad y(0) = b \geq 0.$$

- Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems  $y'(t) = ay(t)$ ,  $y(0) = b$ .
- Nutzen Sie die gefundene Lösung und zeigen Sie, dass (P) sich damit als nichtlineares Ausgleichsproblem der Form

$$(AP) \quad \text{Minimiere} \quad f(a, b) := \|\Phi(a, b) - y\|^2 \quad \text{unter} \quad a \leq 0, b \geq 0$$

mit einer Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $y = (y_1, \dots, y_m)$  schreiben lässt.

- Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für (AP) und zeigen Sie, dass für eine Lösung  $(a^*, b^*)$  folgende Identität gilt:

$$\Phi(a^*, b^*)^T (\Phi(a^*, b^*) - y) = 0$$

Weitere Informationen zum Thema Schaumzerfall (auch verlinkt auf der Homepage):  
<http://rze-falbala.rz.e-technik.fh-kiel.de/~waller/ftp/wissexp/WS0506/Wissart.pdf>

### Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Freitag, den 18. Juli 2008, 12.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.

Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

**Homepage:** <http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/optim12008s/>

### Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-11.30 Uhr

Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung

bitte wenden

**Klausur: Optimierungstheorie**

Montag, 8. September, 9.00-11.00 Uhr, HMU

**Anmeldung:**

- Studierende der Wirtschaftsmathematik (Vordiplomsklausur): Die Anmeldung erfolgt über Ihren Betreuer im Vordiplom (PD Dr. M. Neher). Anmeldeschluss hierfür ist der **7. August 2008**.
- Studierende anderer Fachrichtungen (Studienbegleitende Prüfung): Sie müssen sich die Prüfung von der für Sie zuständigen Stelle genehmigen lassen und anschließend Ihren Zulassungsschein bis spätestens **31. August 2008** im Sekretariat bzw. beim Übungsleiter abgeben.

**Übungsklausur: Optimierungstheorie**

Mittwoch, 23. Juli, 9.00-10.30 Uhr, Redtenbacher HS

**Anmeldung:**

Zur Teilnahme ist keine Anmeldung nötig. Insbesondere dürfen auch alle Studierenden teilnehmen, die nicht die notwendigen 50% der Punkte in den schriftlichen Aufgaben erreicht haben.

**Infoveranstaltung für Studierende der Wirtschaftsmathematik**

Mittwoch, 16. Juli, 13.00-14.30 Uhr, HS 37