Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie I — Übungsblatt 2

Sommersemester 2008

Aufgabe 5 (Least Squares Probleme) (schriftlich – 5 Punkte)

Bezüglich einer Menge von $n \in \mathbb{N}$ Basisfunktionen $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^n$, $\phi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wird eine Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $u(t) = \sum_{i=1}^n x_i \phi_i(t)$ gesucht, die zu $m > n$ gegebenen Daten $\{(t_k, y_k)\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, Lösung des Minimierungsproblems

$$(LS) \qquad \text{Minimiere} \quad \sum_{k=1}^{m} \left(u(t_k) - y_k\right)^2$$

ist. Formulieren Sie ein Minimierungsproblem zur Bestimmung der Koeffizienten $\{x_i\}_{i=1}^n$ und zeigen Sie, dass dies ein unrestringiertes quadratisches Optimierungsproblem der Form

$$(QP) \qquad \text{Minimiere} \quad \frac{1}{2} x^T Q x - c^T x + \beta \qquad \text{unter} \quad x \in \mathbb{R}^n \,,$$

ist, wobei $x = (x_1, ..., x_n)$. Geben Sie $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ sowie $\beta \in \mathbb{R}$ explizit an.

Wenden Sie obigen Formalismus an, um zu den Basisfunktionen $\{1, \cos t\}$ und den Daten $\{(0,1), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0)\}$, die bestmögliche Approximation u im Sinne von (LS) zu bestimmen. Lösen Sie dazu das entstehende (QP) indem Sie stationäre Punkte bestimmen und für diese die entsprechenden Optimalitätsbedingungen überprüfen.

Aufgabe 6 (schriftlich – 3 Punkte)

Gegeben sei $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $\operatorname{affine}(S) = x^0 + V$, wobei $x^0 \in S$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ der lineare Teilraum

$$V = \operatorname{span}(S - x^0) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x^i - x^0) : x^i \in S\,,\ \lambda_i \in \mathbb{R}\,,\ m \in \mathbb{N} \right\}.$$

ist.

Aufgabe 7 (schriftlich – 4 Punkte)

Betrachten Sie das Optimierungproblem

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \quad (-1-\beta)x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad \text{unter den Nebenbedingungen}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & -4\,, \\ x_1 & + & x_2 & & & \leq & 4\,, \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & \leq & 4\,, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1\,, \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0\,, \end{array}$$

wobei $\beta \in \mathbb{R}$. Geben Sie für alle β die Lösungsmenge von (P) an.

Hinweis: Reduzieren Sie (P) auf ein Problem in $\mathbb{R}^2$ und lösen Sie dieses grafisch.

Aufgabe 8 (mündlich)

Zeigen Sie, dass die Menge $M := \operatorname{conv}(S)$ polyedral ist, wobei

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Freitag, den 25. April 2008, 12.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:

Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/optim12008s/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt. Zur Teilnahme am Übungsbetrieb muss man sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-11.30 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung

Scheinkriterien:

Neben dem erfolgreichen Bestehen der Übungsklausur, müssen zum Erhalt eines Übungsscheins mindestens 50% der möglichen Punkte in den schriftlichen Aufgaben erreicht werden. Die schriftlichen Aufgaben sind handschriftlich und einzeln abzugegeben. Die Scheinklausur wird wahrscheinlich in der ersten Woche nach Vorlesungsende stattfinden.