Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie I — Übungsblatt 3

Sommersemester 2008

Aufgabe 9 (Eigenschaften der Projektion) (schriftlich – 4 Punkte)
Die Projektion auf die konvexe Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ (gemäß dem Projektionssatz (2.7) der Vorlesung) definiert eine Abbildung $P_K : \mathbb{R}^n \to K$ (setze $P_K(x) = x^*$ für $x \notin K$ wobei $x^* \in K$ die Projektion von x auf K ist, und $P_K(x) = x$ für $x \in K$). Zeigen Sie:

a) P_K ist global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$, d.h.

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\| \qquad \text{für alle } \ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

b) Falls K ein linearer Teilraum ist, dann ist $x^* = P_K(x)$ charakterisiert durch

$$z^T(x - x^*) = 0 \qquad \text{für alle } \ z \in K\,.$$

Aufgabe 10 (Strikter Trennungssatz) (schriftlich – 4 Punkte)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex, sowie $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Zudem seien die Mengen disjunkt, d.h. $K \cap M = \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $K - M := \{x \in \mathbb{R}^n : x = y - z\,,\ y \in K\,, z \in M\}$ ist abgeschlossen und konvex.

(b) Die Mengen K und M lassen sich strikt trennen, d.h. es existiert ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ und ein Skalar $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$a^T y < \gamma < a^T z \qquad \text{für alle } \ y \in K \ \text{ und für alle } \ z \in M\,.$$

Aufgabe 11 (schriftlich – 3 Punkte)
Zeigen Sie mit dem Lemma von Farkas, dass zu $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ folgende Alternative gilt:

(i) $Ax = 0\,,\quad x \geq 0\,,\quad x \neq 0\,,$ ist lösbar durch ein $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $A^T y > 0\,,$ ist lösbar durch ein $y \in \mathbb{R}^m$.

Aufgabe 12 (mündlich)
Sei $K = \operatorname{cone}\{x^1, \ldots, x^m\} \subset \mathbb{R}^n$ ein endlich erzeugter konvexer Kegel. Dann heißt $K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : y^T x \leq 0 \text{ für alle } x \in K\}$ der zu K duale Kegel. Zeigen Sie:

(a) $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T x^i \leq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m\}$.

(b) Betrachten Sie den Spezialfall $m = n$ und für $i = 1, ..., n$ sei $x^i = e^i$, wobei e^i der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$ ist. Geben Sie den Kegel K und seinen dualen Kegel K° explizit an.

(c) $K^{\circ\circ} = (K^\circ)^\circ = K$. (Benutzen Sie das Lemma von Farkas)

(d) $(-K)^\circ = -(K^\circ)$.

(e) Die Projektion $x^* = P_K(x)$ von $x \in \mathbb{R}^n$ auf den Kegel K ist charakterisiert durch

$$x^* \in K\,, \qquad x - x^* \in K^\circ\,, \qquad \text{und} \qquad (x - x^*)^T x^* = 0\,.$$

(f) $P_K(x) = 0$ genau dann wenn $x \in K^\circ$.

Bezeichnung: Zu einer Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist $-K \subset \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$-K := \{x \in \mathbb{R}^n : \ -x \in K\}\,.$$

Abgabe:
Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Freitag, den 2. Mai 2008, 12.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Service/Material:
Unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/optim12008s/

finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Übungsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien zur Vorlesung bereitgestellt. Zur Teilnahme am Übungsbetrieb muss man sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:
Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-11.30 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung