Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Optimierungstheorie I — Übungsblatt 4

Sommersemester 2008

Aufgabe 13 (schriftlich – 5 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$.

(a) Zeigen Sie, dass Q ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ erzeugt. Die zugehörige Norm sei mit $\|x\|_Q := \sqrt{x^T Q x}$ bezeichnet.

(b) Interpretieren Sie für ein beliebiges $z \in \mathbb{R}^2$ und eine beliebige, nicht leere und konvexe Menge $K \subset \mathbb{R}^2$, die Optimierungsaufgabe

$$(P) \qquad \text{Minimiere} \qquad \|x - z\|_Q^2 \qquad \text{mit} \quad x \in K$$

geometrisch. Ist diese Optimierungsaufgabe eindeutig lösbar?

(c) Es sei nun $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 1\}$. Lösen Sie (P) für $z = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Zeichnen Sie dazu die Höhenlinien der Zielfunktion und versuchen Sie das Problem zu vereinfachen.

(d) Geben Sie eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ an, für die (P) nicht immer eindeutig lösbar sein muss. Begründen Sie ihre Wahl durch ein Beispiel.

Aufgabe 14 (schriftlich – 3 Punkte)

Die Winkel in einem Dreieck seien mit α, β, γ bezeichnet und es sei $90° \geq \alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 0$. Unter allen Möglichkeiten ist das Tripel (α, β, γ) gesucht, für welches

$$f(\alpha, \beta, \gamma) := \min\{\gamma, \beta - \gamma, \alpha - \beta, 90° - \alpha\}$$

maximal ist. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Optimierungsproblem.

Hinweis: Führen Sie eine geeignete Hilfsvariable ein, und versuchen Sie diese zu maximieren.

Aufgabe 15 (mündlich)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossenen, konvex und nicht leer, sowie $x \in K$. Ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialrichtung* für K in x, wenn es Folgen (x^k), (λ_k) mit $x^k \in K$, $\lambda_k > 0$, gibt, so dass für $k \to \infty$ gilt:

$$x^k \to x, \qquad \lambda_k \to 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\lambda_k}(x^k - x) \to d\,.$$

Die Menge aller Tangentialrichtungen in x bildet dann den konvexen und abgeschlossenen *Tangentialkegel* $T_K(x)$. Ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ heißt *normale Richtung* für K in x, falls $(y - x)^T d \leq 0$ für alle $y \in K$ gilt. Die Menge aller normalen Richtungen in x bildet dann den konvexen und abgeschlossenen *Normalenkegel* $N_K(x)$. Zeigen Sie:

(a) $T_K(x) = \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(K - x))$

(b) $N_K(x) = T_K(x)^\circ \qquad$ und $\qquad T_K(x) = N_K(x)^\circ$.

(c) Geben Sie für $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$ den Normalen- und den Tangentialkegel für alle $x \in K$ an.

Bezeichnung: $\mathrm{cl}(K)$ bezeichne den Abschluss (engl.: closure) von K, d.h.

$$\mathrm{cl}(K) := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ es gibt eine Folge } (x^k) \subset K \text{ mit } x = \lim_{k\to\infty} x^k\}.$$

Hinweis: Zur Definition des dualen Kegels, siehe Aufgabe 12 (Übungsblatt 3).

Abgabe:

Die schriftlichen Übungsaufgaben sind bis spätestens **Freitag, den 9. Mai 2008, 12.00 Uhr** in den Einwurfschlitz Optimierungstheorie, neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, einzuwerfen.
Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Die schriftlichen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich ausgearbeitet abgegeben werden. Bitte heften Sie die Blätter zusammen und schreiben Sie leserlich.

Homepage: http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/optim12008s/

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mi. 10.00-11.30 Uhr
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Di. 10.00-11.30 Uhr oder nach Vereinbarung